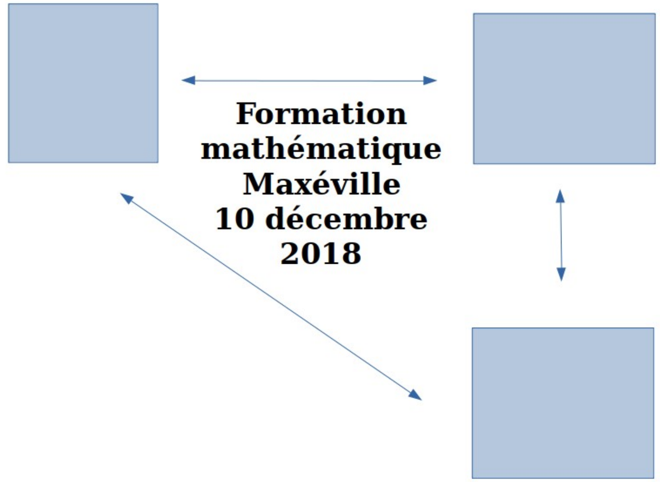


Former à la résolution de problèmes en cycle 2 en articulant les résultats de la recherche et les prescriptions officielles

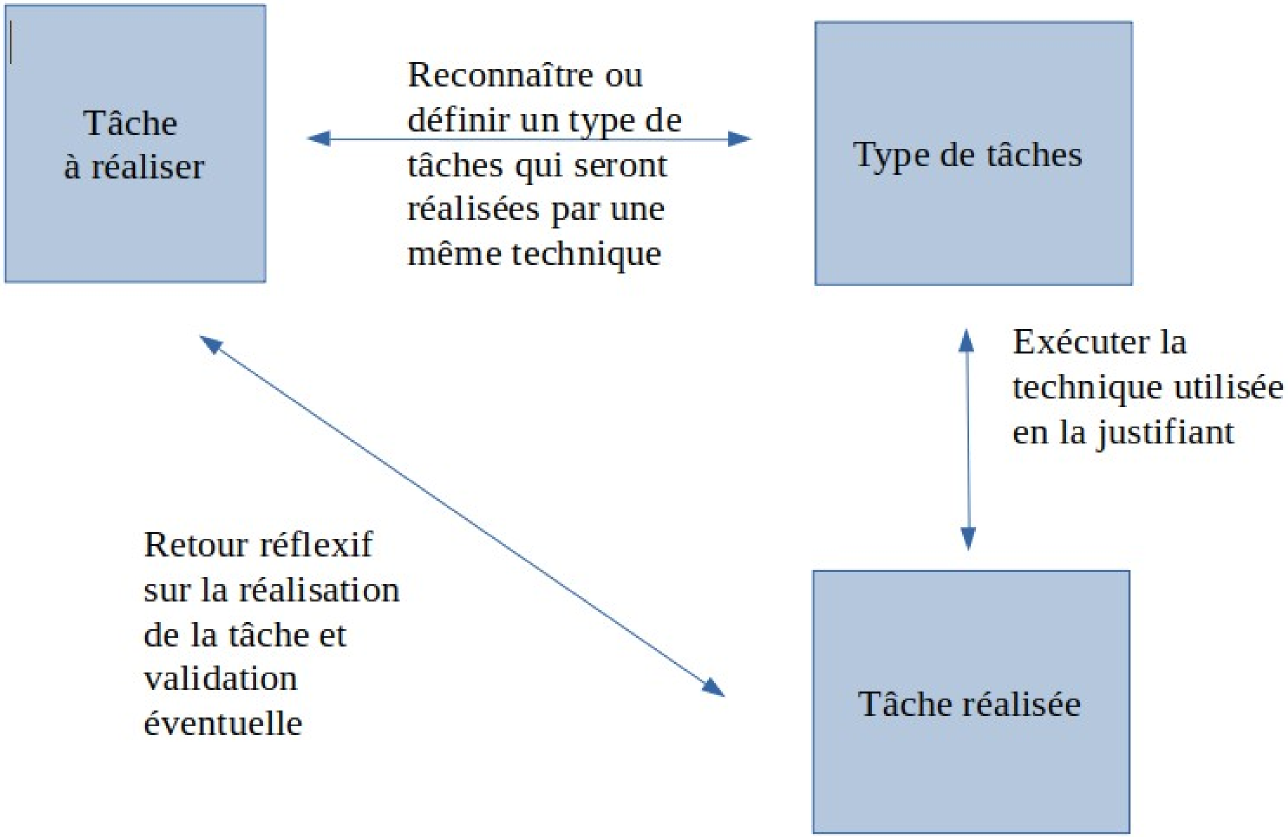
Richard Cabassut
ESPE de l'académie de Strasbourg
LISEC EA 2310
COPIRELEM

Plan

- Types de problèmes
- Les compétences développées
- Progression dans la résolution de problèmes
- Former à la résolution de problèmes au calcul au cycle 2

ENTRE SENS ET TECHNIQUE

SENS



T
E
C
H
N
I
Q
U
E

RETOUR REFLEXIF : contrôle, métacognition, validation

Textes officiels : Prescriptions ? Ressources ?

Prescription : un ensemble de règles et de conseils formalisé par écrit réglementant officiellement une activité, généralement professionnelle (Wikipedia)

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015

La résolution de problèmes à l'école élémentaire

NOR : MENE1809043N
note de service n° 2018-052 du 25-4-2018
MEN - DGESCO A1

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

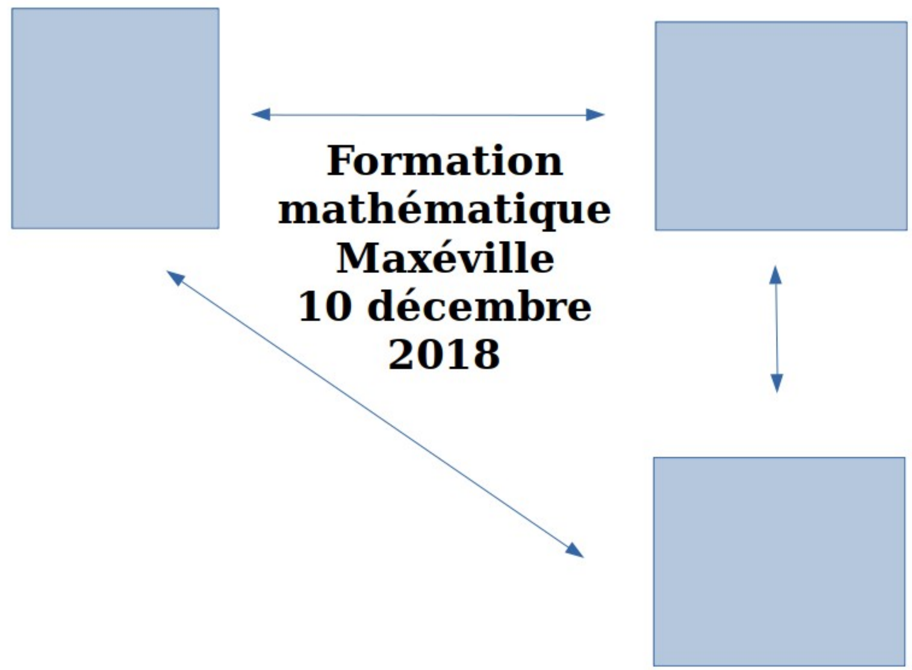
Bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018

Cycle 2

Volet 1 : les spécificités du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2)

Résultats de la recherche

- Riley, M. S., Greeno, J. G., et Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (dir.), The development of mathematical thinking (p.153-196). New York, NY: Academic Press.
- Levain Jean-Pierre, Didierjean André (2017) Problèmes multiplicatifs, proportionnalité et théorie des champs conceptuels. In Rééducation Orthophonique. N° 269.
- Sander Emmanuel (2018) Une approche interprétative de la résolution de problèmes. In Julia Pilet & Céline Vendeira (ed.) (2018) Préactes du séminaire de didactique des mathématiques. ARDM.

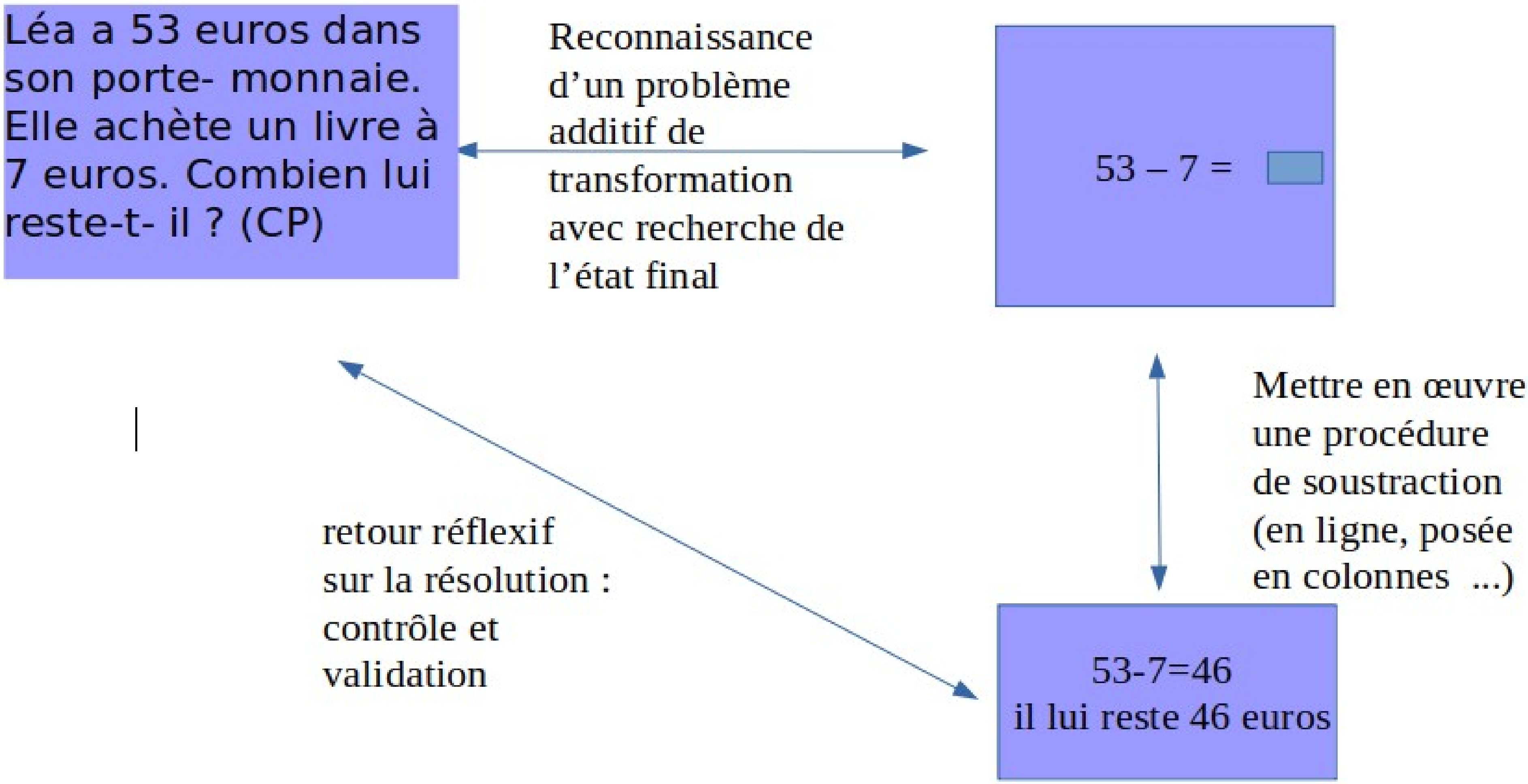


Types de problèmes

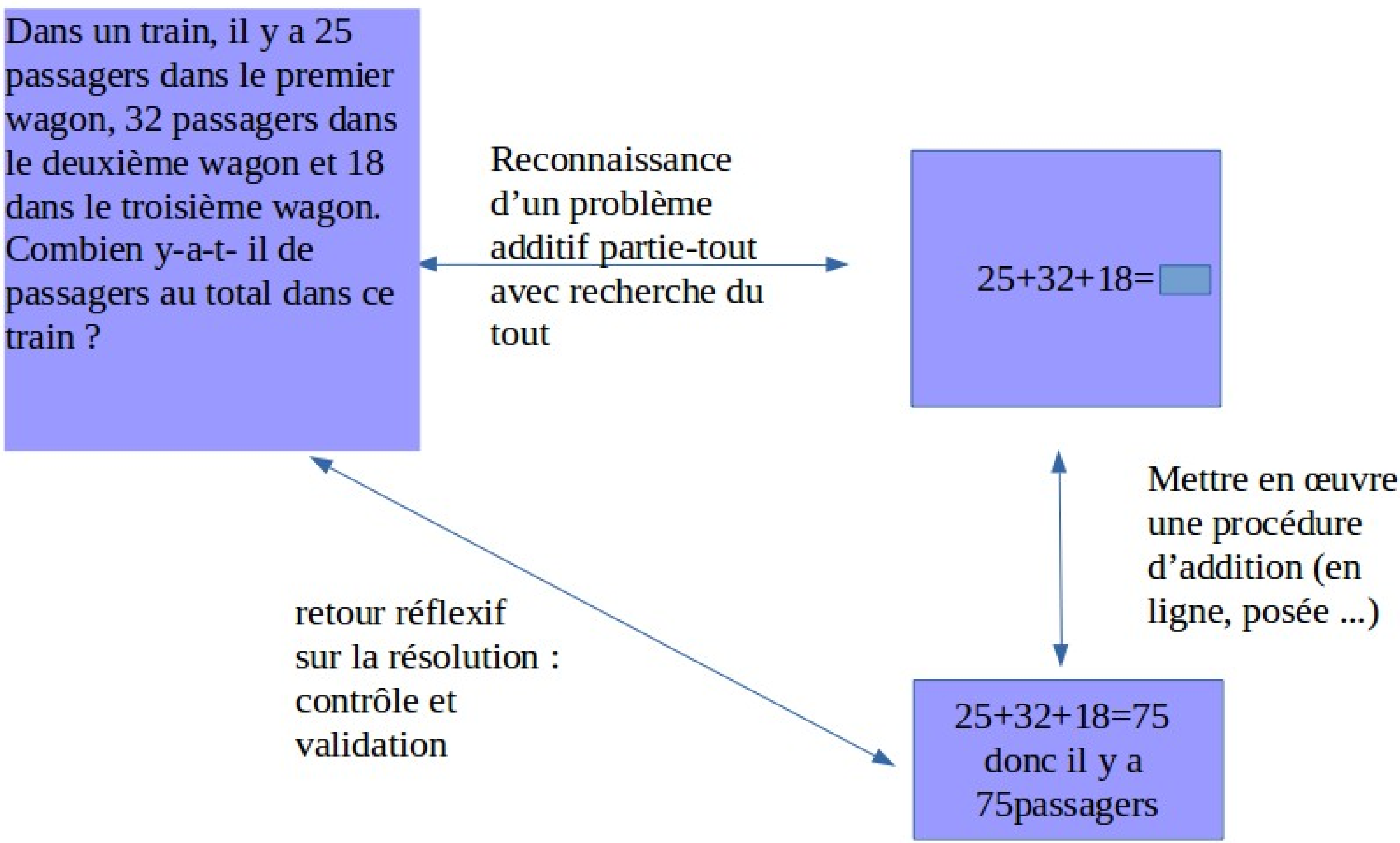
La classification de Houdement (2018)

- Problèmes routiniers : problèmes à 1 étape (additifs ; multiplicatifs). Une fois le problème reconnu la résolution est routinière.
- Problèmes complexes : se décomposent en problèmes routiniers (Problèmes à plusieurs étapes)
- Problèmes atypiques : ne se décomposent pas simplement en problèmes routiniers (Avant qu'un problème ne devienne routinier il y a une première rencontre où il est atypique. Exemple : les situations-problèmes de Brousseau)

Problème à une étape qui va devenir routinier ou de référence



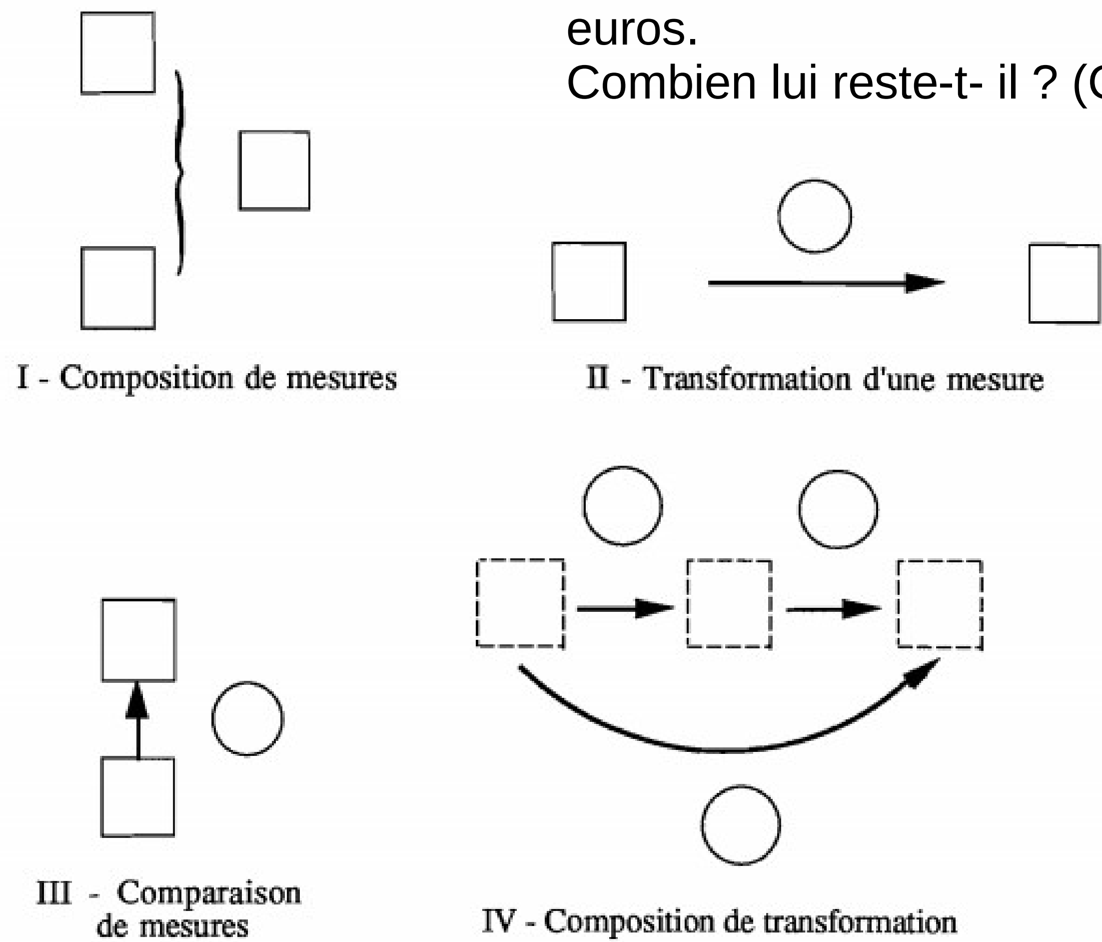
Autre exemple



Prob. additifs à 1 étape (Vergnaud 1990)

Dans mes poches, j'ai 27 billes. J'en ai 11 dans ma poche de gauche. Combien en ai- je dans ma poche de droite ? (CP)

Léa a 53 euros dans son porte-monnaie. Elle achète un livre à 7 euros.
Combien lui reste-t- il ? (CP)



Léo a 188 billes. Lucie en a 75 de plus. Combien Lucie a-t- elle de billes ? (CE1)

Jean a gagné 6 billes puis il en a perdu 9. Combien a-t-il perdu de billes ?

Catégorie de problèmes et taux de réussite
(Riley & al. 1983) cité par (Fayol 2008)

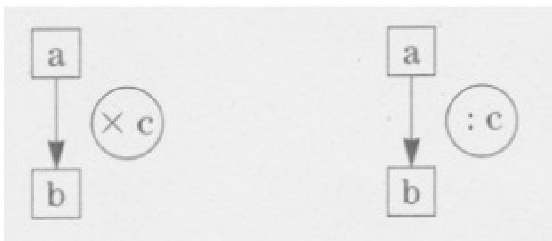
Remarque :
La classification changement, combinaison, comparaison de Riley correspond à la classification transformation, composition, comparaison de Vergnaud.

TYPES DE PROBLEME		TAUX DE REUSSITE			
PROBLEMES DE CHANGEMENT		**Mat.**	**CP**	**CE1**	**CE2**
Changement 1	X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?	.87	1.00	1.00	1.00
Changement 2	X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ?	1.00	1.00	1.00	1.00
Changement 3	X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?	.61	.56	1.00	1.00
Changement 4	X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y ?	.91	.78	1.00	1.00
Changement 5	X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien X avait-il de billes ?	.09	.28	.80	.95
Changement 6	X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?	.22	.39	.70	.80
PROBLEMES DE COMBINAISON					
Combinaison 1	X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont-ils de billes ensemble ?	1.00	1.00	1.00	1.00
Combinaison 2	X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ?	.22	.39	.70	1.00
PROBLEMES DE COMPARAISON					
Comparaison 1	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y ?	.17	.28	.85	1.00
Comparaison 2	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X ?	.04	.22	.75	1.00
Comparaison 3	X a 3 billes. Y a 5 billes de plus que X. Combien Y a-t-il de billes ?	.13	.17	.80	1.00
Comparaison 4	X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien Y a-t-il de billes ?	.17	.28	.90	.95
Comparaison 5	X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	.17	.11	.65	.75
Comparaison 6	X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	.00	.06	.35	.75

Prob. multiplicatifs à 1 étape (Vergnaud & al. 2001)

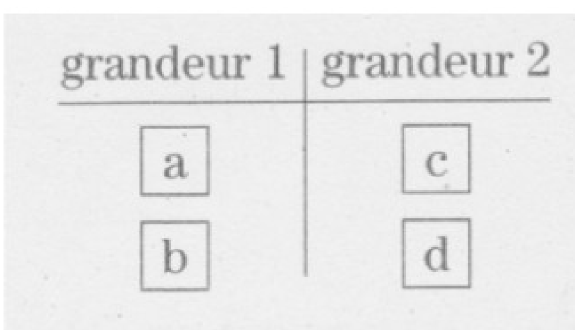
Dans un car il y a 8 filles et 3 fois plus
De garçons. Combien y a-t-il de garçons ?

1. Comparaison multiplicative de grandeurs



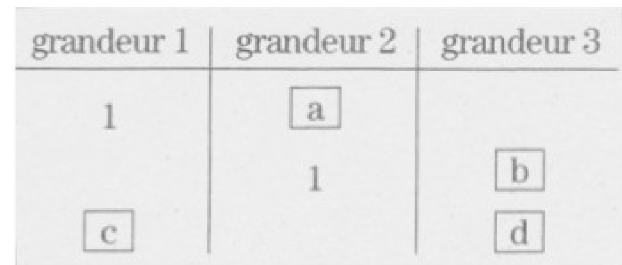
Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y-a- t- il de biscuits en tout ? (CP)

2. Proportionnalité simple



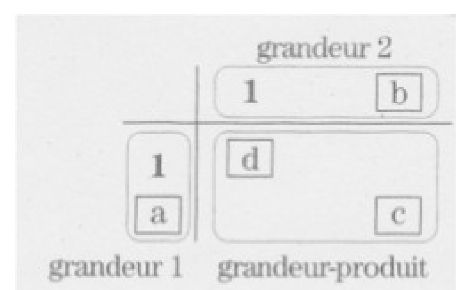
Le professeur commande 4 paquets de cahiers. Dans chaque paquet il y a 10 cahiers et chaque cahier coûte 2€. Combien le professeur va-t-il payer ?

3. Proportionnalité simple composée



3 garçons et 4 filles vont danser. Combien de couples différents garçon-fille peut-on constituer ?

4. Proportionnalité double



Facteur de complexité de la multiplication (Levain, Vergnaud 1995 et Levain 1992)

- La structure mathématique :
  - La proportionnalité simple est mieux réussi que la proportionnalité composée ou double.
  - Passage difficile des problèmes impliquant une seule multiplication ou division aux problèmes de quatrième proportionnelle.
- La taille et la nature des nombres impliqués (surtout au cycle 3 avec les décimaux)
- Interférences avec l'apprentissage des structures additives
- La familiarité avec le contexte de la situation.
- Les situations multiplicatives avec des petits nombres, entiers, dans un contexte familier, sont mieux réussis.
- La commutativité n'est pas utilisée : Calculer le coût de a objets à b euros chacun ne donne pas la même réussite que b objets à a euros chacun

  (Les facteurs de complexité liés à la proportionnalité ne sont pas abordés dans cet exposé))

Recommandations pour l'enseignement de la multiplication (Levain, Vergnaud 1995)

- Faire varier les structures de problèmes multiplicatifs présentées aux élèves
- Faire varier les valeurs numériques (petits à grands entiers)
- Faire varier les procédures de résolutions pour un même problème.
- Aider l'élève à constituer un répertoire de procédures.
- Attirer l'attention des élèves sur la commutativité de la multiplication.
- Valoriser la présentation en tableau des problèmes multiplicatifs (quand l'une des 4 quantités est l'unité) pour préparer les problèmes de recherche de quatrième proportionnelle du cycle 3.

Problèmes complexes (à plusieurs étapes ou mixant des opérations)

- CP : Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?
- CE1 : Dans un restaurant, il y a 4 tables de 6 personnes et 7 tables de 4 personnes.Combien ce restaurant peut-il recevoir de clients ?
- CE2 : Le directeur achète 100 paquets de 30 gâteaux en début de mois. Les élèves en ont mangé 1 800 pendant le mois. Combien lui en reste-t- il à la fin du mois?

Importance du contexte (Sander 2018)

- « Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ? » : Une majorité de professeurs d'école résolvent en 3 étapes.
- « Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ? » : Une majorité de professeurs d'école résolvent en 1 étape.

Problèmes atypiques : ne se décomposent pas simplement en problèmes routiniers

Lecture à la maternelle

La classe de CP va lire un nouveau livre à l'école maternelle. Il s'appelle Porculus. Combien de pages chaque enfant va lire ?

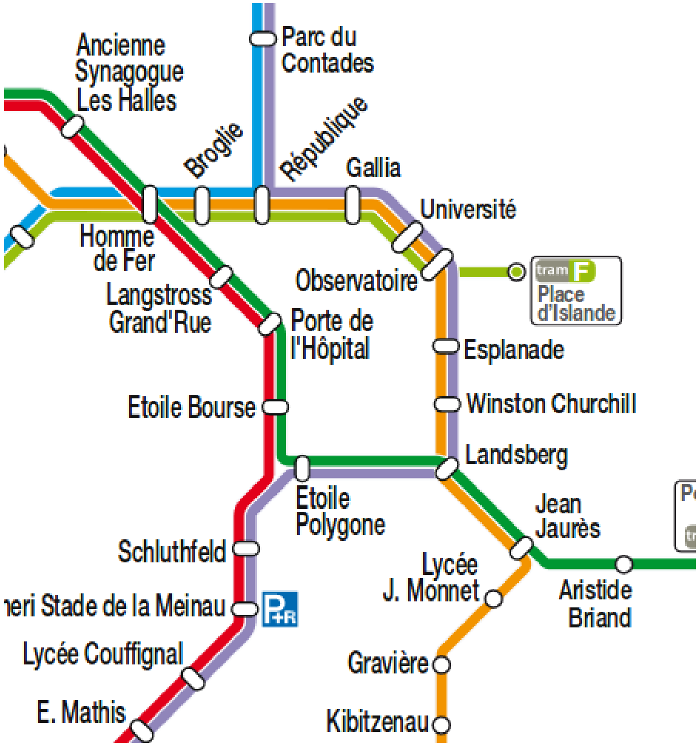
d'après (LEMA 2009)

La course

Dans une cour d'école se trouvent un tilleul et un marronnier et un mur droit en clôture. Un groupe d'élèves organisent une course : chaque élève commence au tilleul puis va toucher le mur et revient vers le marronnier. Quel est le meilleur endroit où toucher le mur ?

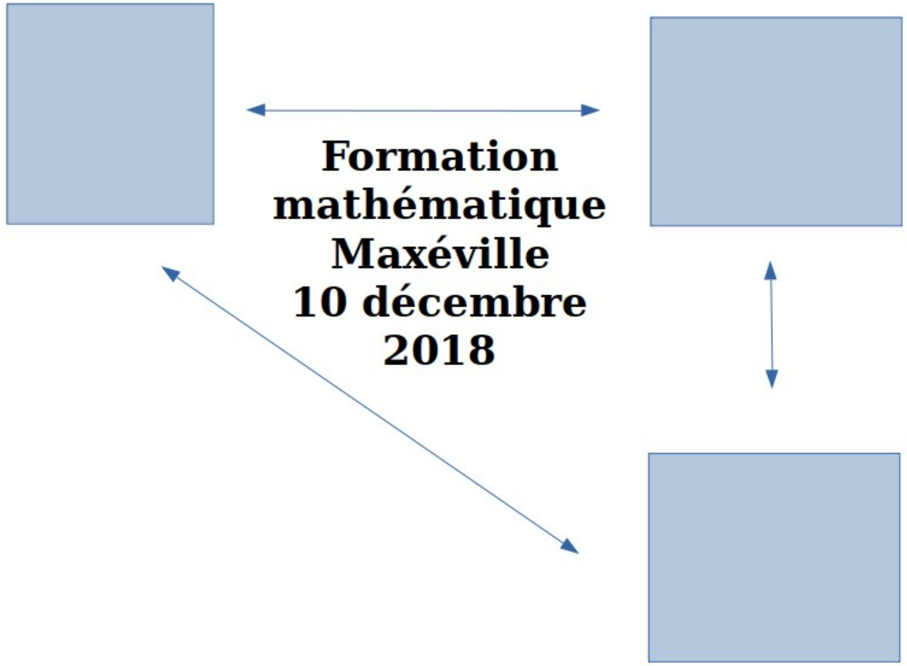
d’après (Petit 2007)

Le meilleur trajet



Notre classe (arrêt E. Mathis) veut aller visiter l'Opéra (arrêt République). Quel est le meilleur trajet ?

d'après (Cabassut 2009)



Les compétences développées

Les compétences (BO n°30 du 26/7/18)

Chercher
- s'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome ;
- tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.

Modéliser
- utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures ;
- réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements ;
- reconnaître des formes dans des objets réels et les reproduire géométriquement.

Représenter
- appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.) ;
- utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs ;
- utiliser diverses représentations de solides et de situations spatiales.

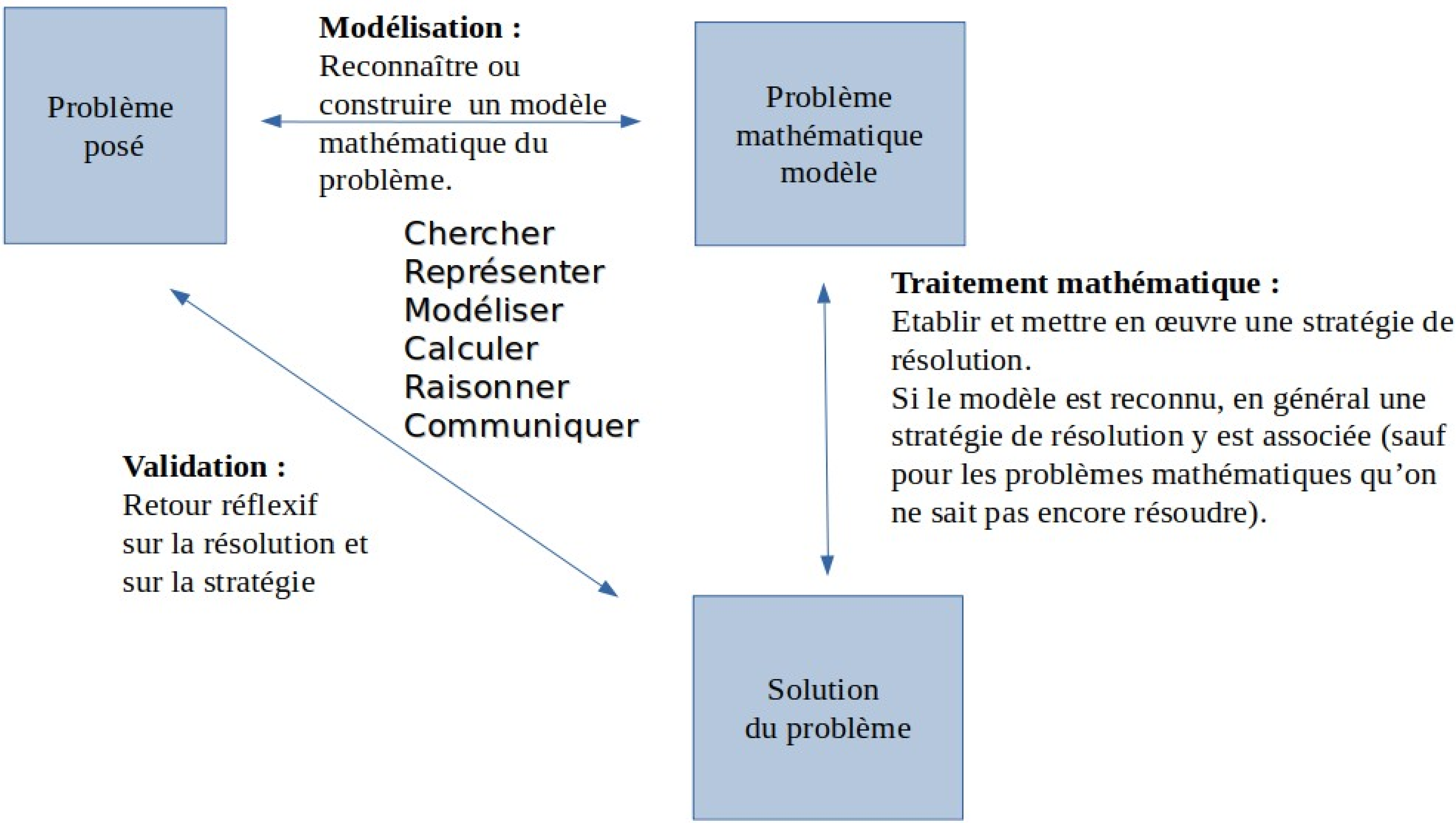
Raisonner
- anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure ;
- raisonner sur des figures pour les reproduire avec des instruments ;
- tenir compte d'éléments divers (arguments d'autrui, résultats d'une expérience, sources internes ou externes à la classe, etc.) pour modifier ou non son jugement ;
- prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'intérêt de justifier ce que l'on affirme.

Calculer
- calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu ;
- contrôler la vraisemblance de ses résultats.

Communiquer
- utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.

Cycle de résolution d'un problème

avec aller-retour possible pour ajuster le cycle



Chercher

- s'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome ;
- tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.

- Chercher un modèle mathématique qui va permettre de résoudre le problème **(dans la phase modélisation)**:
  - Reconnaissance d'un modèle connu (à qui est associé une stratégie de résolution ou qu'on ne sait pas résoudre pour le moment)
  - Construction d'un nouveau modèle (exemple : situation-problème de Brousseau 1998)
- Chercher, une fois le modèle mathématique adopté, une stratégie de résolution **(dans la phase traitement mathématique)**
  - Soit en comparant différentes stratégies connues pour ce modèle,
  - Soit en inventant une nouvelle stratégie.

Chercher

(extraits du document ressources des programmes de 2016 : Chercher)

Amener les élèves à savoir quoi chercher [1e activité] et comment chercher [2e activité]. [...]
Il s’agit de deux activités mettant en œuvre une recherche, mais alors que dans le premier cas, l’élève met en œuvre des processus éprouvés, repère et utilise les attitudes expertes qui lui auront explicitement été indiquées comme telles, dans l’autre, il s’agit de donner un sens à la question, voire de définir la question.

Une part plus importante d’initiative : compléter un tableau, voire construire un tableau qui n’est pas présent, effectuer des calculs qui ne sont pas explicitement demandés.

Chercher un « bon » modèle

- « J’ai 4 oranges. Je reçois 5 pommes en échange de chaque orange. Combien aurai-je de pommes ? » **analogie** de scénario obstructive (Sander 2018)
- « Dans l’arche de Noé montent 5 éléphants, 8 girafes et 8 moutons. Quel est l’âge du capitaine ? » (Chevallard 1980) modèle incorrect
- Méthode en barres (voir vidéo) : S’aider d’une **représentation**

https://www.youtube.com/watch?v=_9cHD7vkwmU

Chercher

« contribuer à la mise en place d'un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes. Cela nécessite de conduire, année après année, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier pour faire acquérir aux élèves les connaissances et compétences leur permettant :

- de comprendre le problème posé ;
- d'établir une stratégie pour le résoudre, en s'appuyant sur un schéma ou un tableau, en décomposant le problème en sous-problèmes, en faisant des essais, en partant de ce que l'on veut trouver, en faisant des analogies avec un modèle connu ;
- de mettre en œuvre la stratégie établie ;
- de prendre du recul sur leur travail, tant pour s'assurer de la pertinence de ce qui a été effectué et du résultat trouvé, que pour repérer ce qui a été efficace et ce qui ne l'a pas été afin de pouvoir en tirer profit pour faire des choix de stratégies lors de futures résolutions de problèmes.

(BO spécial n°3 du 26 avril 2018) »

Chercher

Dans les repères de progressivité du CE1 :« Il [l'élève] modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.[…] Il possède des stratégies de lecture d'énoncé de problèmes pour pouvoir le résoudre plus facilement (recherche de la question, des données **utiles**…) » auquel s'ajoute en CE2 : « Il résout des problèmes nécessitant l'exploration d'un tableau ou d'un graphique ».

« On trouve ainsi, assez classiquement, à propos des problèmes, et en amont de leur résolution, des consignes du type : trouver la question, souligner les informations utiles, barrer les informations inutiles, voire trouver l'opération …. Or ce sont des tâches qui ne peuvent pas être faites sans résoudre le problème, elles sont partie prenante de la résolution, **elles ne peuvent pas précéder la résolution**. […] Récemment les programmes ont même, sous couvert de descriptifs de la compétence Chercher, réinjecté ces **idées fausses** en mettant en avant les deux alinéas suivants dans Chercher cycle 3 et cycle 4 : « Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc. » (Mathématiques Cycle 3, 2015, p. 199). « Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances. (Mathématiques Cycle 4, » 2015, p. 367). (Houdement 2018, p.112)

Chercher

- Comment chercher pour trouver : souvent boîte noire ; importance du retour réflexif (exemple : le BO sur le calcul prescrit un retour réflexif sur les stratégies de calcul pour une séance sur deux à propos des séances quotidiennes de calcul)
- Chances et risques de l'analogie :
  - Trouver du nouveau par analogie à du connu
  - « Les objets sont pareils » et « les objets sont pareils pour ... »
  - Ne pas enfermer les élèves dans des analogies (usage abusif de l'analogie (Brousseau 1998) ; analogie obstructive (Sander 2018)
- Chances et risques des représentations

  Ne pas enfermer les élèves dans des représentations (méthode en barres) ou du matériel (effet « Dienès » de Brousseau (1998)

Modéliser

- utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures ;
- réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements ;
- reconnaître des formes dans des objets réels et les reproduire géométriquement.

La modélisation, si on souhaite permettre aux élèves d'en comprendre les enjeux, nécessite dans l'idéal de partir d'un problème extra-mathématique, de construire un modèle, de le faire fonctionner et de pouvoir confronter ses résultats à la situation modélisée

(extraits du document ressources des programmes de 2016 : Modéliser)

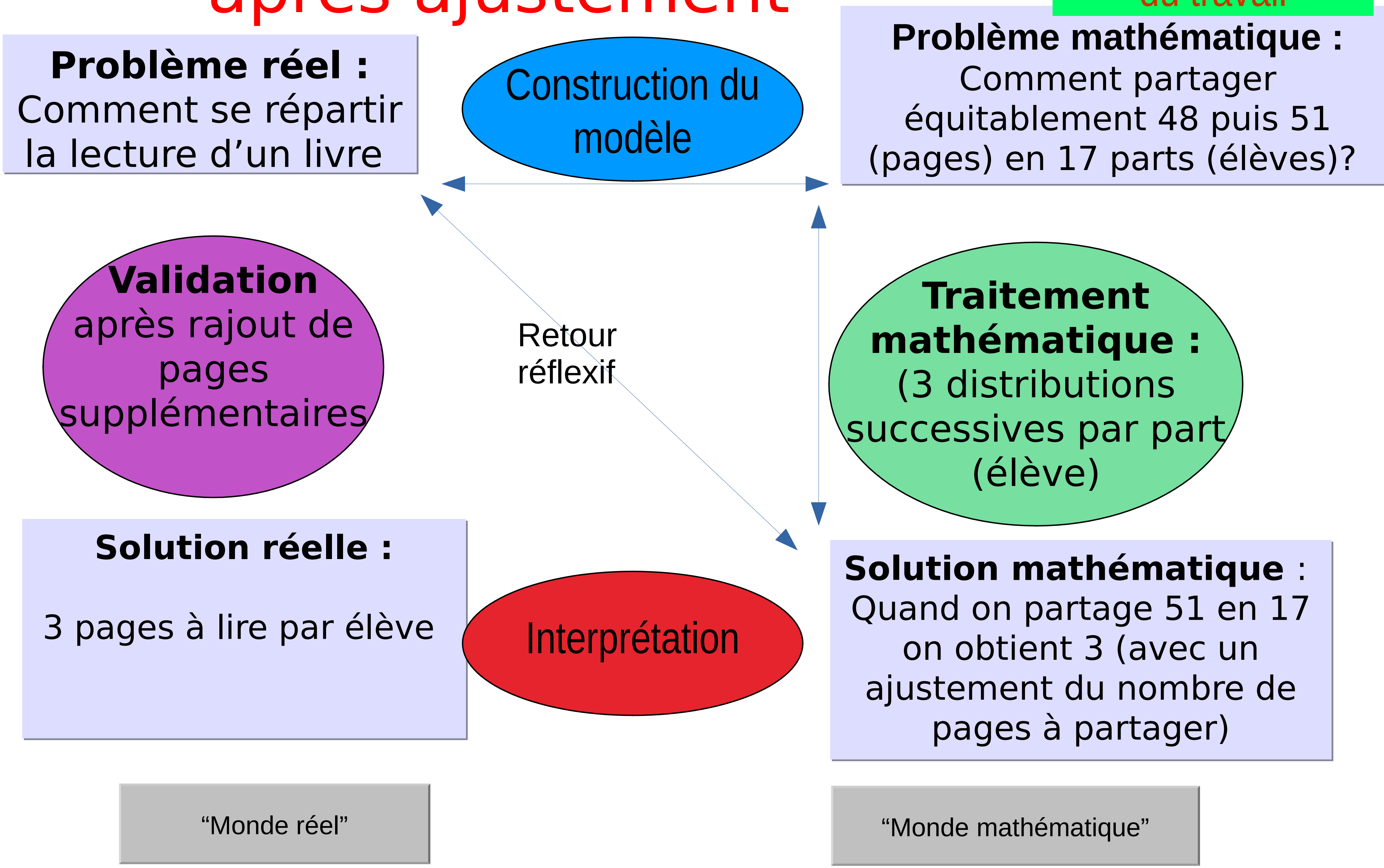
Lecture à la maternelle

La classe de CP va lire un nouveau livre à l'école maternelle. Il s'appelle Porculus. Combien de pages chaque enfant va lire ?

d’après (LEMA 2009)

Lecture à la maternelle après ajustement

Communication : compte-rendu du travail



Cycle de modélisation du projet LEMA (2009)

Variables des problèmes de modélisation (Cabassut 2009)

- Lien avec le monde extra-mathématique (réel, vie de la classe, autre discipline) : authenticité, intérêt, familiarité, connaissances extra-mathématiques pour les données et les hypothèses
- Lien avec le monde mathématique : modèle à reconnaître ou à construire, procédures attendues, lien avec le programme
- Degré d'ouverture : question, données, modèles disponibles, procédures disponibles, connaissances extra-mathématiques et mathématiques disponibles
- Les fonctions visées par une tâche de modélisation : reconnaître ou construire un modèle (de référence ou singulier) , résoudre un modèle mathématique (utiliser une procédure connue ou nouvelle) , interpréter la solution mathématique, valider, réaliser un cycle complet de modélisation, communiquer ...)

Degré d'ouverture : question, données, modèles disponibles, procédures disponibles, connaissances extra-mathématiques disponibles

Lecture à la maternelle

Version 1 : La classe de CP va lire un nouveau livre à l'école maternelle. Il s'appelle Porculus. Comment se répartir la lecture ?

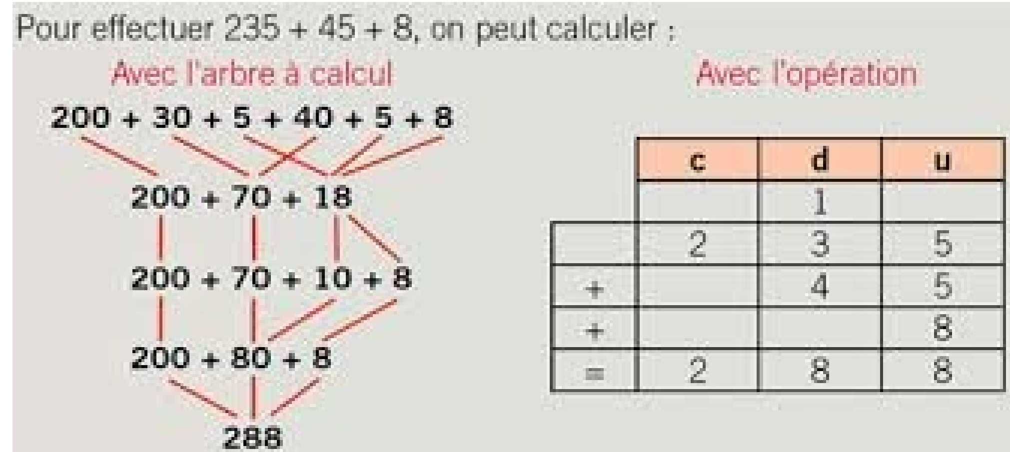
Version 2 : Combien de pages lit chaque enfant lorsqu’un livre de 51 pages est partagé entre 17 élèves ?

Représenter

- appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.) ;
- utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs ;
- utiliser diverses représentations de solides et de situations spatiales.

Représenter

(extraits du document ressources des programmes de 2016 : Représenter)



« Représenter », c'est donner à voir, ou au moins rendre perceptible à la vue et à l'esprit.

« Représenter » des objets,

« Représenter » des relations entre les objets, que ce soit par un croquis de géographie, un codage en géométrie ou un schéma en électricité.

« Représenter » des entités abstraites, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un mot des objets mathématiques […] Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens. Ces représentations diverses peuvent alors appartenir à différents registres : registre graphique, registre du langage naturel (« un parallélépipède à 6 faces »), registre numérique, registre de l'écriture symbolique, etc.

Les schémas

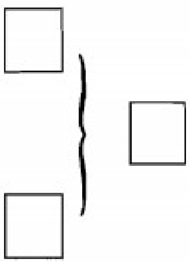
« On peut supposer qu'il existe au moins trois sortes de schémas abstraits :

- ceux qui correspondent à des catégories bien différenciées en termes de structures de problèmes (notons que l'on commence tout juste à savoir reconnaître ces catégories et à les analyser de manière systématique) ;

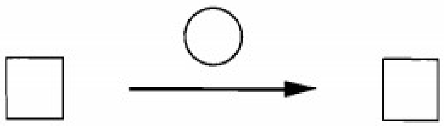
- ceux qui correspondent à des outils de modélisation introduits dans l'enseignement (par exemple le tableau de proportionnalité ou les diagrammes fléchés pour les problèmes additifs) ;

- ceux qui correspondent à des procédures de résolution acquérant le statut de règle d'action pour une catégorie donnée de problèmes, c'est-à-dire de procédures à la fois automatisées et comprises pour cette classe de problèmes (par exemple la règle de trois autrefois). » (Julo 1995)

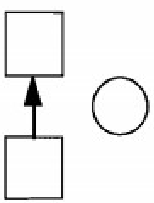
Représentations de Vergnaud



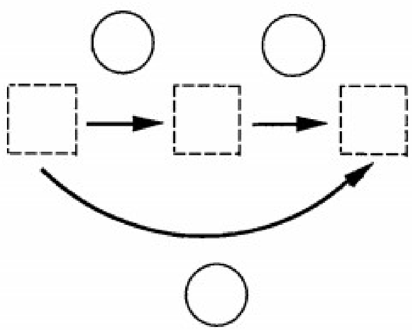
I - Composition de mesures



II - Transformation d'une mesure

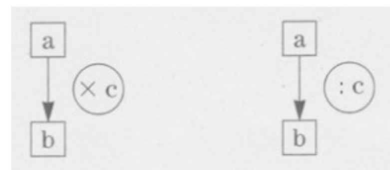


III - Comparaison de mesures



IV - Composition de transformation

1. Comparaison multiplicative de grandeurs



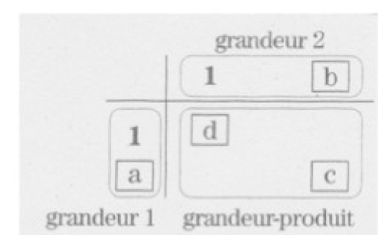
2. Proportionnalité simple

grandeur 1	grandeur 2
a	c
b	d

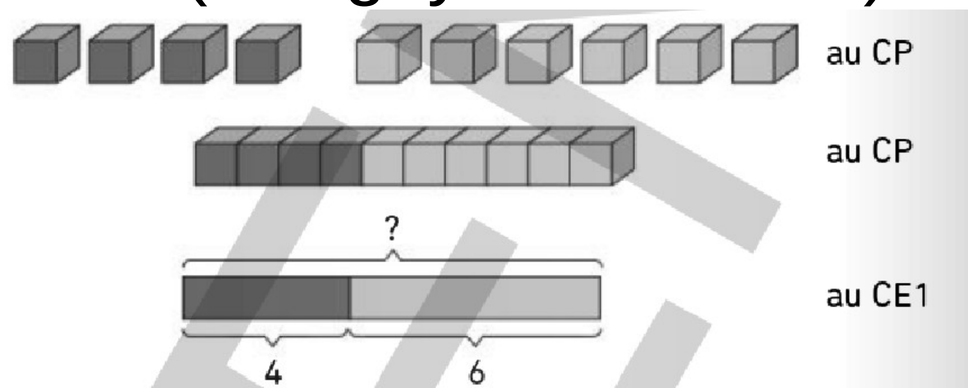
3. Proportionnalité simple composée

grandeur 1	grandeur 2	grandeur 3
1	a	
	1	b
c		d

4. Proportionnalité double

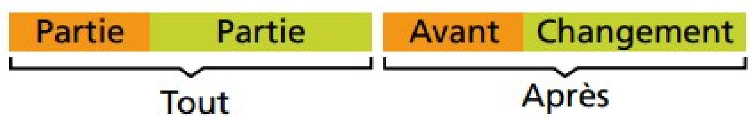


Représentation en barres
(Neagoy & al.   2017)



Les modèles « partie-tout » et « avant-après »

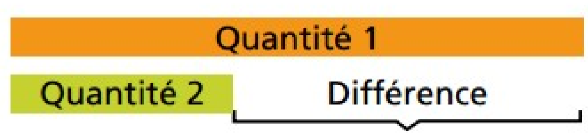
Les modèles en barres illustrant des situations de type « partie-tout » et « avant-après » se présentent sous la même forme : une barre divisée en deux parties.



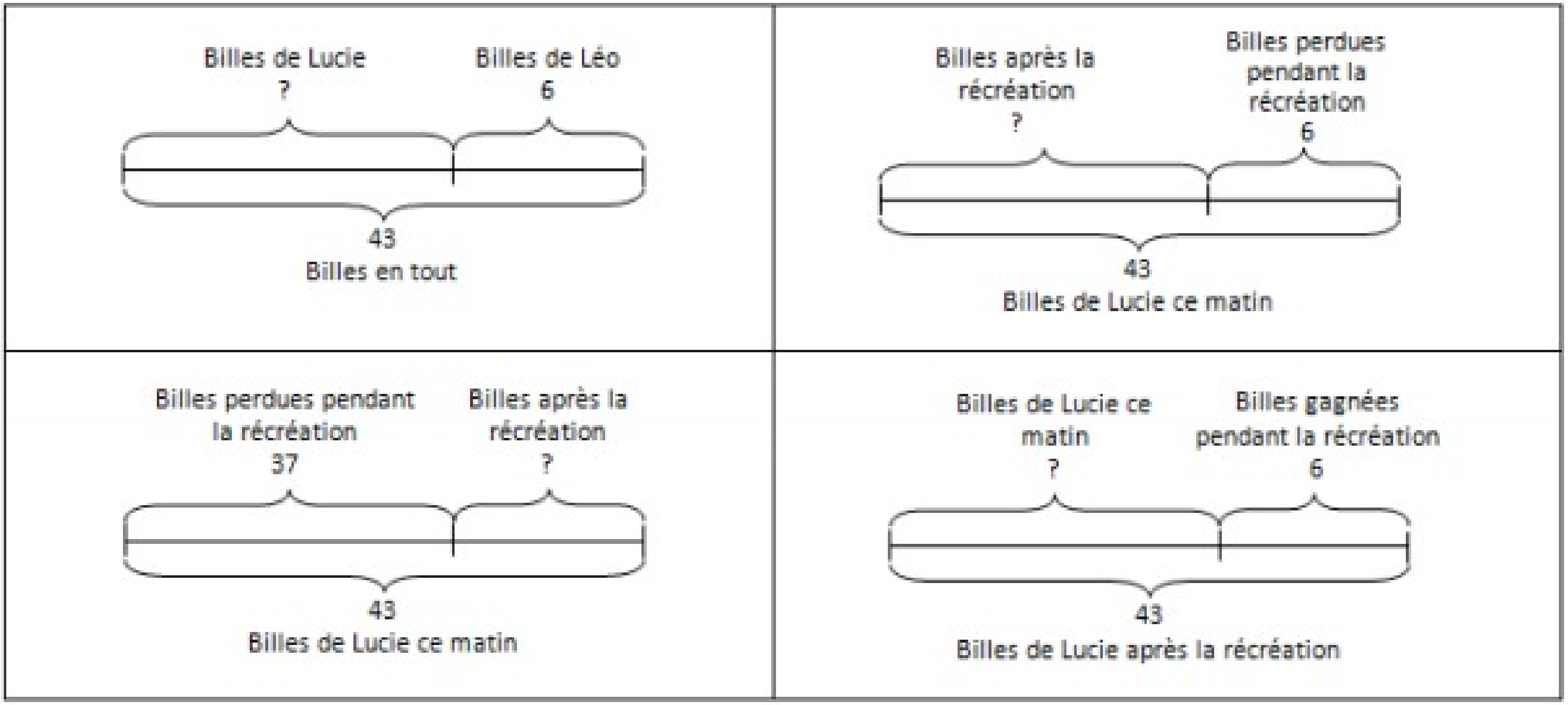
Lorsqu'on ajoute, l'« avant » est une partie et l'« après », le tout. Lorsqu'on soustrait, c'est le contraire.

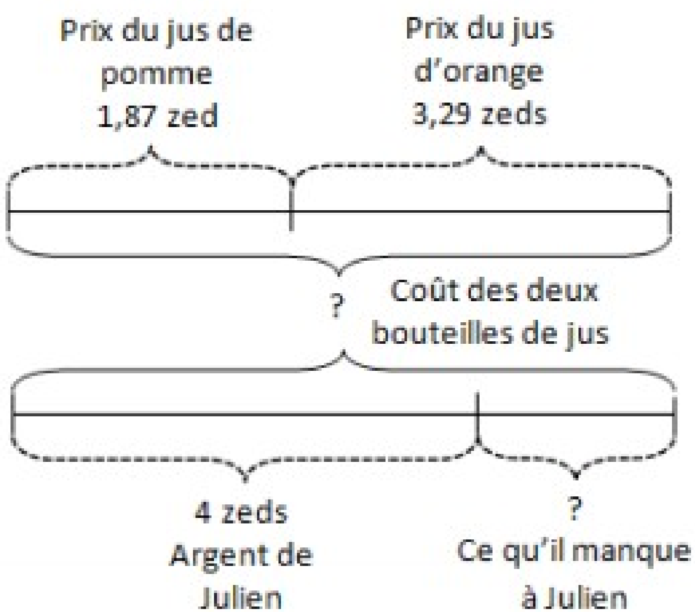
Les modèles de comparaison

Les modèles en barres illustrant des situations de comparaison additive se composent quant à eux de deux barres :



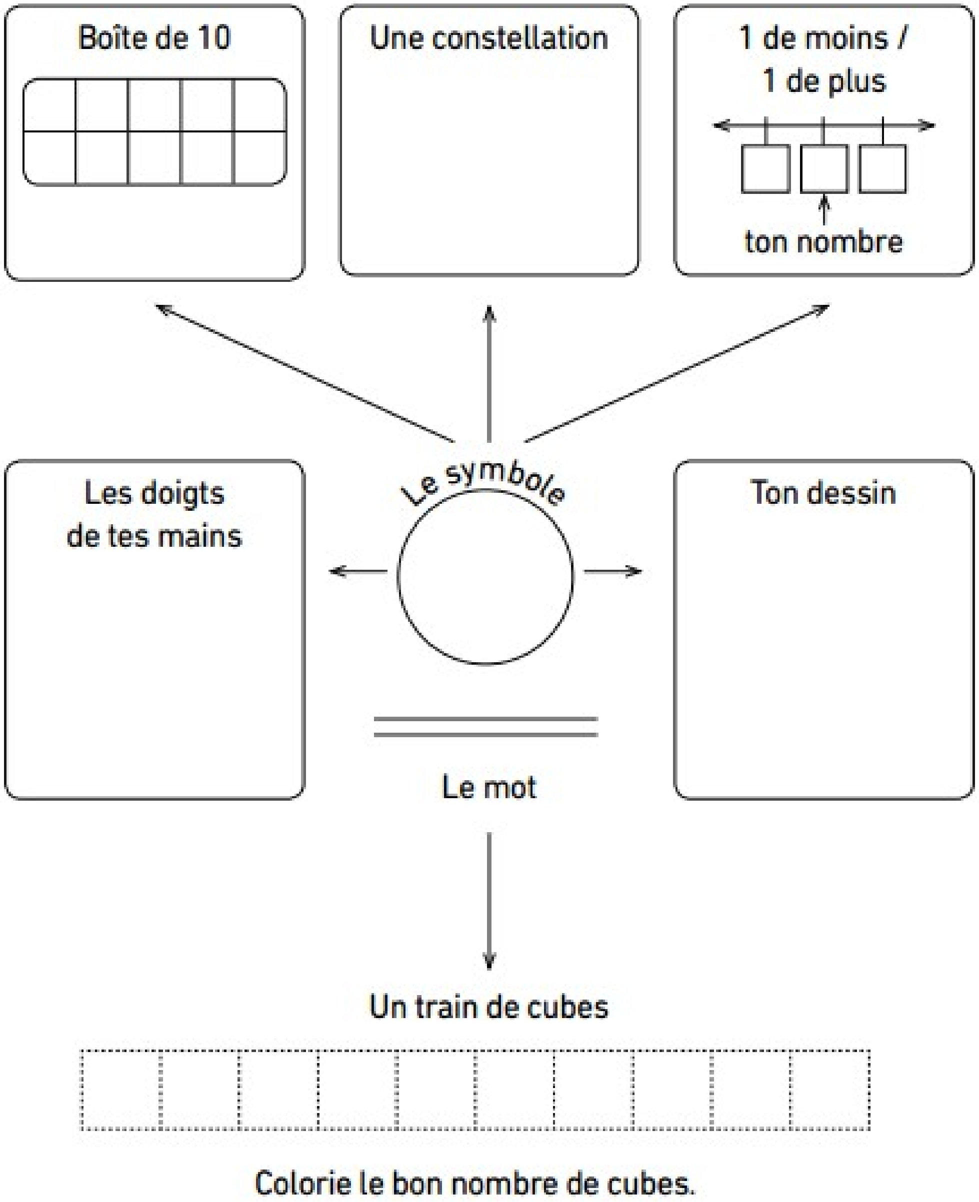
Les représentations schématiques associées à ces quatre problèmes peuvent ainsi prendre la même forme et correspondre au même « modèle » :





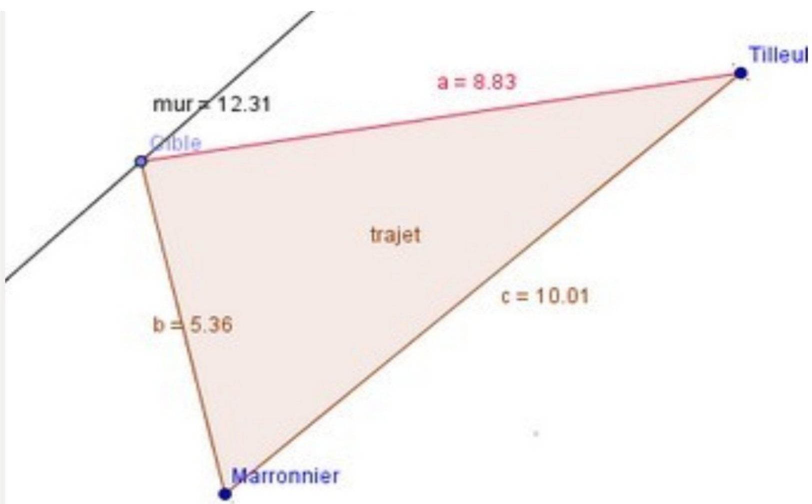
BO du 26 avril 2018

Représentation d'un nombre (extrait de Neagoy (2018) « La méthode de Singapour »- CP)



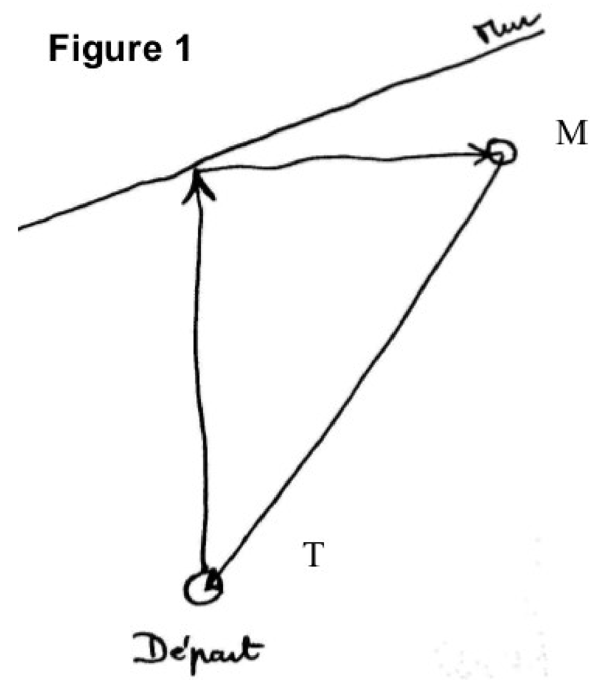
La course

Dans une cour d'école se trouvent un tilleul et un marronnier et un mur droit en clôture. Un groupe d'élèves organisent une course : chaque élève commence au tilleul puis va toucher le mur et revient vers le marronnier. Quel est le meilleur endroit où toucher le mur ?



d'après (Petit 2007)

Figure 1



Vers les registres de représentation sémiotique (Duval 1993)

- savoir représenter un modèle mathématique dans différents registres de représentation (langue orale, langue écrite, tableau, graphique, calcul en ligne, calcul posé en colonnes...)
- savoir traiter mathématiquement dans un registre (traitement intra-registre)
- savoir convertir d’un registre à l’autre (traitement inter-registres) (différence de traitements entre le calcul posé et le calcul mental : Butlen et Masselot)

Représenter et modéliser

- La similarité entre représenter et modéliser : un modèle mathématique est un type de représentation ; il peut y avoir plusieurs modèles mathématiques ou extra-mathématique.
- La différence entre représenter est modéliser est du même ordre qu'entre dessin et figure :
  - dans la figure on a mis une connaissance qui au départ n'est pas dans le dessin (Parzysz 1988)
  - dans le modèle mathématique on met une connaissance, un sens qui n'est pas dans la représentation initiale qui au départ n'est pas mathématique ou n'a pas la propriété mathématique attendue
- Dans le programme mathématique il semble que représenter est réservé aux représentations à l'intérieur des mathématiques et que modéliser est réservé à la représentation mathématique d'un objet extra-mathématique (mathématisation)

Exemples de modèles de référence pour les problèmes multiplicatifs d'après Vergnaud

Problème : J'achète 12 stylos à 1,50€ les 3. Combien dois-je payer ?

Nombre de stylos	Nombre d'euros
3	1,50
12	x

Le problème mathématique modèle est un problème de 4ème proportionnelle : trouver x sachant que (3;12) est proportionnel à (1,50;x). C'est un modèle sous l'hypothèse que le nombre de stylos est proportionnel au nombre d'euros payés
En fait l'hypothèse de proportionnalité ne va pas obligatoirement de soi : on pourrait imaginer une promotion, pour 10 stylos achetés 2 sont offerts.

Exemples de modèles de référence pour les problèmes multiplicatifs d’après Vergnaud

Autre problème : Pierre a 12 ans. Il pesait 15 kg à 3 ans. Combien pèse-t-il maintenant ?
On peut représenter le problème par le tableau suivant :

âge	poids
3	15
12	x

Ici des observations extra-mathématiques sur la relation entre âge et poids montrent qu’il n’y a pas de relation de proportionnalité.
Il est important de ne pas naturaliser les modèles de référence et de les valider par nos connaissances du monde réel.

Calculer

- calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu ;
- contrôler la vraisemblance de ses résultats.

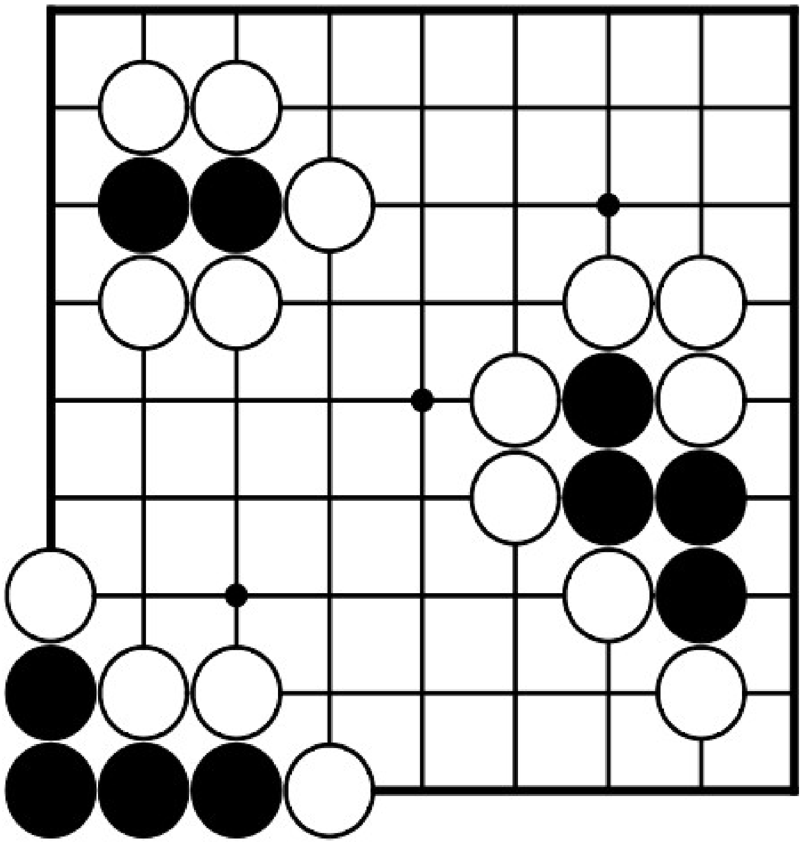
- Les procédures non numériques
  - De mise en correspondance terme à terme (par exemple pour comparer, pour trouver le nombre d’éléments avec une correspondance avec la comptine numérique)
  - De désignation (exemple des 7 garages à chercher où l’élève dessine sept chiffres 7)
  - De distribution pour réaliser un partage

Calculer

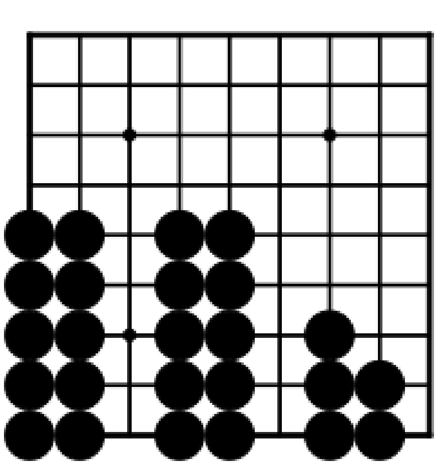
- Les procédures numériques utilisent
  - Les propriétés mathématiques de certaines opérations :
    - Opération interne : la soustraction et la division ne sont pas internes dans l'ensemble des entiers naturels : il ne faut pas hésiter à dire que ces opérations sont impossibles dans certains cas.
    - Elément neutres (0 pour +, 1 pour x),
    - Associativité, commutativité, distributivité ...
  - Les faits numériques des nombres (multiples, décompositions additives ou multiplicatives (tables) ...
  - Les propriétés d'écritures en base 10 des nombres (numération)
- Les représentations visuelles peuvent aider au calcul
  - bouliers
  - abaques
  - jeu de Go (http://strasgo.gostrasbourg.fr/)

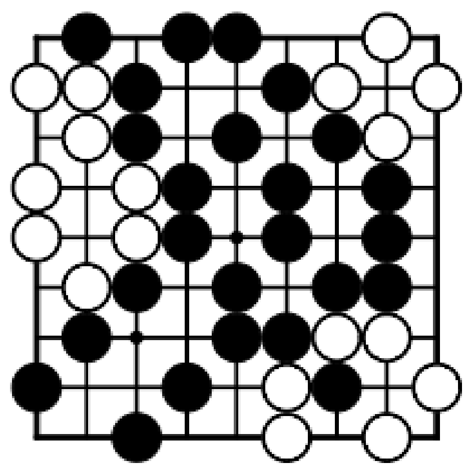
Exemple du jeu de Go au CP

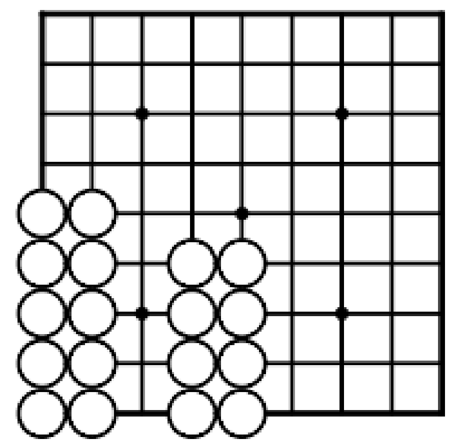
(http://strasgo.gostrasbourg.fr/ Fenech Albert et Antoine 2018)



Les problèmes dans le jeu de Go pour calculer, représenter et réfléchir sur les stratégies en mathématiques
(groupe de l’IREM de Strasbourg)







Combien y a-t-il de pions de chaque couleur ?

Butlen, Masselot : Le nombre au cycle 2 (2010)

Des recherches ont montré que les procédures mobilisées par les élèves de fin de cycle 2, sont l'algorithme écrit « posé dans la tête » (procédure quasi majoritaire), les différentes procédures mobilisant des décompositions canoniques et, beaucoup plus rarement, celles mobilisant d'autres décompositions additives ou soustractives.

Les élèves préfèrent, dans un premier temps, utiliser des procédures sûres (qui fonctionnent dans tous les cas et conduisent, à condition d'être menées à terme, au résultat attendu) mais coûteuses plutôt que des procédures mieux adaptées au calcul en jeu. De plus, les élèves les plus en difficulté en mathématiques se limitent davantage et plus longtemps aux premières. Ils font preuve de moins d'adaptabilité.

Des recherches ont montré (Butlen, Pézard 2003) qu'une pratique régulière de calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, se traduit, pour un certain type de problèmes standards, par une accélération du processus de reconnaissance de l'opération en jeu.

Raisonner

- anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure ;
- raisonner sur des figures pour les reproduire avec des instruments ;
- tenir compte d'éléments divers (arguments d'autrui, résultats d'une expérience, sources internes ou externes à la classe, etc.) pour modifier ou non son jugement ;
- prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'intérêt de justifier ce que l'on affirme.

- Arguments non mathématiques :
  - Argument visuel : je le vois donc c'est vrai
  - Argument pragmatique : ça réussit donc c'est vrai
  - Argument individuel (subjectif) : exemple deu meilleur trajet ou du partage pour la lecture.
- Arguments mathématiques pour chercher (exemple de la course) :
  - Raisonner par essais et ajustements
  - Raisonner de manière inductive (sur des exemples)
  - Explorer un tableau , une figure, un graphique ...
- Arguments mathématiques pour prouver :
  - Contre-exemple : exemple de la course
  - Etude exhaustive de tous les cas
  - Calcul pour établir un fait numérique
  - De la géométrie perceptive vers la géométrie des propriétés au cycle 3 (exemple de la course)

Raisonner

Raisonner : inférer une conclusion de données.
Argument : raisonnement élémentaire (qu'on ne peut pas décomposer en des raisonnements plus simples).
Règle d'inférence de l'argument : une règle qui permet d'inférer de données à la conclusion de l'argument.
Logique : Théorie qui organise les règles d'inférences.
Démontrer en mathématiques qu'une proposition est vraie c'est établir par des raisonnements, à partir de définitions et théorèmes mathématiques acquis, en utilisant les règles d'inférence de la logique mathématique, que la proposition est vraie.
Démonstration mathématique : peut être décomposée en une suite linéaire d'arguments mathématiques, partant des données initiales, chaque argument utilise comme données des conclusions d'arguments précédents et/ou des données initiales. Le dernier argument aboutit à la conclusion finale.
Montrer, justifier, déduire, prouver. Données, hypothèse, conjecture, conclusion
Document ressource :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ressources_transversales/99/6/RA16_C3C4_MATH_math_maitr_lang_N.D_600996.pdf

Raisonner

raisonnement déductif : (utilisé en mathématiques)
((si A alors B) vrai et A vrai) donc B vrai
exemple : (si ABCD carré alors l'angle A est droit) et ABCD carré donc l'angle A est droit.
raisonnement abductif : (utilisé en sciences expérimentales)
((si A alors B) vrai et B vrai) donc A vrai
exemple : (si ABCD carré alors l'angle A est droit) et l'angle A est droit , donc ABCD est   carré
raisonnement inductif : (utilisé pour conjecturer)
Pour la course on peut trouver un point du mur qui réalise le trajet le plus court en comparaison à plusieurs autres points. Comme c'est vérifié pour plusieurs poinst on peut conjecturer que c'est vrai pour tous les points.

(document ressources des programmes de 2016 : Raisonner)

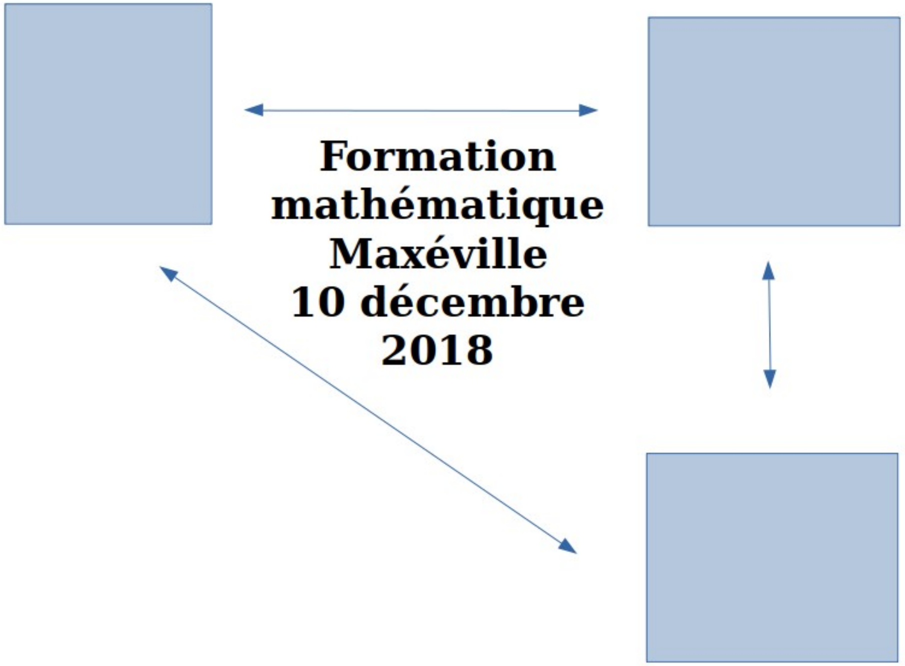
Communiquer

- utiliser l’oral et l’écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.

Toutes les difficultés des élèves ne sont pas imputables à des problèmes de langue et tous les problèmes de langue ne résultent pas d’un déficit lexical. Des malentendus peuvent naître d’énoncés ambigus, d’un déficit d’explications ou de la difficulté à gérer les interactions entre plusieurs registres de langue.
On peut distinguer plusieurs modalités :

- les écrits de la classe avec le professeur ;
- les écrits personnels ;
- les écrits de groupe.

(extraits du document ressources des programmes de 2016 : communiquer)



Progression dans la résolution de problèmes

Résolution de problèmes dans le domaine « nombres et calculs »

On introduit explicitement le sens des opérations et des symboles =, +, -, × et :

CP	CE1	CE2
Dès **le début de l'année**, les élèves commencent à résoudre des problèmes additifs. À partir de la **période 3**, les élèves résolvent aussi quelques problèmes multiplicatifs portant sur de petits nombres et dont la résolution s'appuie sur une itération d'additions, sans aucune difficulté calculatoire mais invitant à construire en situation le sens de la multiplication. En parallèle, dans la continuité du travail sur le sens effectué en maternelle, des problèmes de division sont initiés dans des situations très simples de partage ou de groupement.	Dès le **début de l'année**, les élèves consolident leur capacité à résoudre des problèmes additifs à une ou deux étapes. À partir de la **période 3**, ils rencontrent de nouveaux problèmes multiplicatifs qu'ils peuvent résoudre en utilisant leurs connaissances des premières tables de multiplication (exemple de la tablette de chocolat : combien y a-t-il de carreaux dans une tablette de 3 carreaux par 6 ?). En **période 4**, l'étude du sens de la division est préparée par la résolution de deux types de problèmes : ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur et ceux où l'on partage équitablement une grandeur en un nombre donné de grandeurs. En parallèle, les élèves résolvent des problèmes à deux étapes mixant addition et soustraction, ou multiplication lorsque les nombres en jeu ne nécessitent pas la mise en œuvre d'un algorithme opératoire.	Dès le **début de l'année**, les élèves résolvent des problèmes additifs et multiplicatifs portant sur des nombres plus grands, ou des problèmes relevant de plusieurs opérations, nécessitant par exemple l'exploration d'un tableau ou d'un graphique. Tout au long de l'année, en appui sur les compétences en calcul qui augmentent progressivement, les élèves consolident l'étude du sens de la division par la résolution de deux types de problèmes abordés au CE1 : le partage et le groupement. Le réinvestissement dans de nombreux problèmes arithmétiques élémentaires permet ensuite aux élèves d'accéder à différentes compréhensions de chaque opération et les liens entre elles.

Cycle 3

Dès le début du cycle, les problèmes proposés relèvent des quatre opérations.

La progressivité sur la résolution de problèmes combine notamment :

- les nombres mis en jeu : entiers (tout au long du cycle) puis décimaux dès le CM1 sur des nombres très simples ;
- le nombre d'étapes que l'élève doit mettre en œuvre pour leur résolution ;
- les supports proposés pour la prise d'informations : texte, tableau, représentations graphiques.

La communication de la démarche prend différentes formes : langage naturel, schémas, opérations.

CM1	CM2	6e
Problèmes relevant de la proportionnalité		
Le recours aux propriétés de linéarité (multiplicative et additive) est privilégié. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples verbalisés (« Si j'ai deux fois, trois fois… plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois… plus d'ingrédients » ; « Je dispose de briques de masses identiques. Si je connais la masse de 7 briques et celle de 3 briques alors je peux connaître la masse de 10 briques en faisant la somme des deux masses »). Dès la **période 1**, des situations de proportionnalité peuvent être proposées (recettes…). L'institutionnalisation des propriétés se fait progressivement à partir de la **période 2**.	Dès la **période 1**, le passage par l'unité vient enrichir la palette des procédures utilisées lorsque cela s'avère pertinent. À partir de la **période 3**, le symbole % est introduit dans des cas simples, en lien avec les fractions d'une quantité (50 % pour la moitié ; 25 % pour le quart ; 75 % pour les trois quarts ; 10 % pour le dixième).	Tout au long de l'**année**, les procédures déjà étudiées en CM sont remobilisées et enrichies par l'utilisation explicite du coefficient de proportionnalité lorsque cela s'avère pertinent. Dès la **période 2**, en relation avec le travail effectué en CM, les élèves appliquent un pourcentage simple (en relation avec les fractions simples de quantité : 10 %, 25 %, 50 %, 75 %). Dès la **période 3**, ils apprennent à appliquer un pourcentage dans des registres variés.

Ce que sait faire l'élève (repères de progressivité 2018)

- CP : Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes. Il **modélise** ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques. Il connaît le sens des signes - et +.
- CE1 et CE2 : Les nombres sont inférieurs à 1 000. Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes. Il **modélise** ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques. Il connaît le sens des signes - et +. Il résout des problèmes du champ multiplicatif (itération d'addition) et, **en CE2, du champ de la division.** Il connaît le sens du signe × **et, en CE2, de :** . Il résout des problèmes multiplicatifs qui mettent en jeu un produit. Il résout des problèmes à deux étapes mixant additions, soustractions et/ou multiplications, **et, en CE2, divisions**. Il résout des problèmes de partage, **et, en CE2, de groupement** (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs). Il possède des stratégies de lecture d'énoncé de problèmes pour pouvoir le résoudre plus facilement (recherche de **la** question, des données **utiles…). En CE2, Il résout des problèmes nécessitant l'exploration d'un tableau ou d'un graphique.**

Problèmes additifs à une étape

CP

Dans un train, il y a 25 passagers dans le premier wagon, 32 passagers dans le deuxième wagon et 18 dans le troisième wagon. Combien y-a-t- il de passagers au total dans ce train ?

Dans mes poches, j'ai 27 billes. J'en ai 11 dans ma poche de gauche. Combien en ai- je dans ma poche de droite ?

Léa a 53 euros dans son porte- monnaie. Elle achète un livre à 7 euros. Combien lui reste-t- il ?

Léa a 53 euros dans son porte- monnaie. Elle achète un livre à 48 euros. Combien lui reste-t- il ?

Léa joue au jeu de l'Oie. Elle est sur la case 53 et doit reculer de 7 cases. Sur quelle case va-t- elle poser son pion ?

Il y avait 36 oiseaux dans l'arbre. Il n'en reste plus que 21. Combien d'oiseaux se sont envolés ?

Dans la boîte, il y avait des bonbons. J'en ai mangé 6 et il en reste encore 21. Combien y avait-il de bonbons dans la boîte avant que j'en mange ?

-

CE1

Dans le train, il y a 125 passagers dans le premier wagon, 37 passagers dans le deuxième wagon et 8 dans le troisième wagon. Combien y-a-t- il de passagers au total dans ce train ?

Dans mes coffres, j’ai 227 billes. J’en ai 113 dans mon coffre vert. Combien en ai- je dans mon coffre rouge ?

Lucie a 453 euros sur son compte en banque. Elle achète une tablette à 128 euros. Combien lui reste-t- il ?

Il y avait 451 animaux dans le zoo. Il n’en reste plus que 321.Combien d'animaux se sont échappés ?

Dans ma boîte, il y avait des images. J’en ai distribuées 56 et il m’en reste encore 217. Combien y avait-il d'images dans ma boîte avant que j’en distribue ?

Dans l’école, il y a 111 garçons et 257 filles. Combien y-a-t- il de filles de plus que de garçons ?

Léo a 188 billes. Lucie en a 75 de plus. Combien Lucie a-t- elle de billes ?

CE2

Trois avions se sont posés à l’aéroport : il y avait 825 passagers dans le premier avion, 237 passagers dans le deuxième avion et 358 dans le troisième avion. Combien de passagers au total ont- ils débarqué ?

Dans mes deux coffres, j’ai en tout 8 227 billes. J’en ai 6 113 dans mon coffre vert. Combien en ai- je dans mon coffre rouge ?

Léa a 4 530 euros sur son compte en banque. Elle achète une tablette à 538 euros. Combien lui reste-t- il ?

Il y avait 4 867 visiteurs dans le zoo. Il n’en reste plus que 2 321. Combien de visiteurs sont partis ?

Dans ma boîte, il y avait des images. J’en ai distribué 2 756 et il m’en reste encore 289. Combien y avait-il d'images dans ma boîte avant que j’en distribue ?

Dans les collèges de la ville, il y a 2 734 garçons et 2 957 filles. Combien y-a-t- il de filles de plus que de garçons ?

Léo a 4 188 billes. Lucie en a 75 de plus. Combien de billes a Lucie ?

Problèmes multiplicatifs

CP

- 3 enfants se partagent 18 images (donner ces images). Combien d'images aura chaque enfant ?
- Il y a 24 élèves dans la classe. Pour participer à des rencontres sportives, le professeur constitue des équipes de 4 élèves. Combien y- aura-t- il d'équipes ?
- À la patinoire, l'entraîneur prépare 30 patins pour les enfants de son club de hockey. Combien y-a-t- il d'enfants dans le club ?
- Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y-a- t- il de biscuits en tout ?
- Léo doit ranger tous les œufs dans des boîtes à œufs. Il dispose pour cela de plusieurs boîtes vides avec 6 ou 12 emplacements. Les boîtes doivent être complètes.Trouve deux solutions différentes.

CE1

Problèmes multiplicatifs

- Lucie a fabriqué 3 colliers avec 20 perles chacun. Combien Lucie a-t- elle utilisé de perles ?
- Dans un restaurant, il y a 7 tables de 4 personnes. Combien ce restaurant peut- il recevoir de clients ?
- Un client achète 10 paquets de 25 gâteaux. Combien a-t- il acheté de gâteaux ?
- Dans la salle il y a 3 rangées de 6 chaises : combien de personnes peuvent- elles s’asseoir ?

Exemples de problèmes de partage ou de groupement

- Dans une jardinerie, on peut acheter des plants par lots de 100, de 10 ou à l’unité. Que doit- on acheter pour planter 563 fleurs ?
- Je veux ranger mes 789 photos dans un album. Je peux ranger 10 photos par page.Combien de pages me faut- il pour ranger toutes mes photos ? Combien y aura-t- il de photos sur la dernière page ?

CE2 Problèmes multiplicatifs

- Lucie a fabriqué 30 colliers avec 210 perles chacun. Combien Lucie a-t- elle utilisé de perles ?
- Le directeur achète 400 paquets de 25 gâteaux. Combien a-t- il acheté de gâteaux ?
- Sur un mur on pose 15 rangées de 60 carreaux de faïence. Combien de carreaux a-t- on posés sur le mur ?

Exemples de problèmes de partage ou de groupement

- Dans une jardinerie, on peut acheter des plants par lots de 1 000, de 100, de 10 ou à l'unité. Que peut acheter un jardinier qui souhaite planter 6 563 fleurs ?
- On veut ranger 4 789 photos dans des albums. On peut ranger 500 photos par album. Combien d'albums faut- il pour ranger toutes les photos ? Combien y aura-t- il de photos dans le dernier album ?
- Dans les 5 écoles élémentaires de la ville, il y a 2 356 élèves au total. Les professeurs veulent constituer des équipes de 25 élèves. Combien y aura-t- il d'équipes ?
- Dans le lycée, il y a 1 400 élèves. Les professeurs veulent constituer 80 équipes (de même nombre d'élèves). Combien y aura-t- il d'élèves par équipe ?

Problèmes à plusieurs étapes

CP Exemples de problèmes additifs en deux étapes

Il y avait 37 enfants dans un bus. Au premier arrêt, 12 enfants sont descendus. Au deuxième arrêt, 7 enfants sont montés. Combien y a-t- il d’enfants dans le bus maintenant ?

Dans la bibliothèque de la classe, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 15. Combien y a-t- il de livres dans la bibliothèque de la classe ?

Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t- il de livres documentaires ?

CE1 Exemples de problèmes du champ additif en deux étapes

Il y a 437 passagers dans un train. Au premier arrêt, 127 passagers descendent. Au second arrêt, 237 passagers montent. Combien y a-t- il de passagers dans le train ?

Dans la bibliothèque de l'école, il y a 363 livres. Le professeur en apporte 125 de plus. Les élèves en empruntent 175. Combien y a-t- il de livres dans la bibliothèque de l'école ?

Dans la bibliothèque de l'école, il y a 484 livres. Il y a 135 romans policiers, 221 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?

Exemples de problèmes à deux étapes mixant addition, soustraction et multiplication

Lucie avait 60 perles. Elle a fabriqué 3 colliers avec 20 perles chacun.Combien lui reste-t- il de perles ?

Dans un restaurant, il y a 4 tables de 6 personnes et 7 tables de 4 personnes.Combien ce restaurant peut- il recevoir de clients ?

Le professeur achète 10 paquets de 25 gâteaux. Ses élèves en ont mangé 100. Combien lui en reste-t- il ?

CE2 : Exemples de problèmes du champ additif en deux étapes

Il y a 1 437 passagers dans un train. Au premier arrêt, 1 127 passagers descendent. Un peu plus loin, 1 237 passagers montent. Combien y a-t- il alors de passagers dans le train ?

Dans la bibliothèque de l'école, il y a 6 363 livres. La directrice de l’école achète 1 250 livres nouveaux. Les élèves en empruntent 2 175 le premier mois. Combien y a-t- il de livres à la fin du premier mois ?

Dans la bibliothèque de l'école, il y a 7 986 livres. Il y a 4 359 romans policiers, 1 226 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t- il de livres documentaires ?

Exemples de problèmes à deux étapes mixant les opérations

Pendant la fête des voisins dans une grande ville, on a compté 50 tables de 20 personnes, 60 tables de 6 personnes, 100 tables de 4 personnes. Combien de personnes ont participé à cette fête ?

Lucie avait 6 000 perles. Elle a fabriqué 200 colliers avec 20 perles chacun. Combien lui reste-t-il de perles ?

Le directeur achète 100 paquets de 30 gâteaux en début de mois. Les élèves en ont mangé 1 800 pendant le mois. Combien lui en reste-t- il à la fin du mois?

Problèmes impliquant des grandeurs
Ce que sait faire l'élève

- CP : L'élève résout des problèmes en une ou deux étapes impliquant des longueurs, des durées ou des prix. Il utilise le lexique spécifique associé aux prix.
- CE1 et CE2: Il résout des problèmes en une ou deux étapes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées ou des prix : problèmes impliquant des manipulations de monnaie ; problèmes du champ additif ; problèmes multiplicatifs (addition réitérée) ; problèmes de durées ; problèmes de partage.

CP Problèmes impliquant des manipulations de monnaie (notamment dans des situations de jeu) :

Échanger des pièces contre un billet, ou le contraire.

Constitue une somme de 49 euros avec des billets de 5 et 10 euros et des pièces de 1 et 2 euros.

Calcule la somme constituée par 4 billets de 10 euros, 4 billets de 5 euros et 3 pièces de 2 euros.

Rendre la monnaie sur un billet de 10 euros.

Rendre la monnaie sur 40 euros pour un achat de 32 euros

Problèmes non numériques

♦ Classer selon leur longueur trois objets longs situés à différents endroits de la classe.

♦ Classer quatre objets selon leur masse en utilisant une balance type Roberval (par comparaison deux à deux).

Problèmes du champ additif

Un lundi, la plante mesure 3 cm. Le lundi suivant, elle mesure 12 cm. De quelle longueur a-t-elle grandi ?

Il avait 28 euros, il a dépensé 12 euros. Combien lui reste-t-il ?

Il avait 28 euros. Il a acheté un livre à 12 euros et une trousse à 5 euros. Combien lui reste- t-il ?

Il a 28 euros, il voudrait acheter un très bel album qui vaut 35 euros. Combien lui manque-t-il ?

Problèmes du champ multiplicatif (recherche d'un produit ou recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts dans une situation d'un partage équitable) sur des nombres inférieurs à 30, que l'élève peut résoudre en mobilisant ses connaissances du champ additif ou en s'aidant de manipulations.

Les écritures mathématiques avec les symboles : et × ne sont pas attendues.

Avec 20 cm de ficelle, combien de morceaux de 5 cm puis-je faire ?

Une puce fait des sauts de 2 cm. Quelle distance parcourt-elle en faisant six sauts ?

Un livre coûte 3 euros. Combien cela va-t-il coûter à l'école d'acheter 5 exemplaires de ce livre ?

Combien y-a-t-il de jours dans 3 semaines ?

CE1

Problèmes impliquant des manipulations de monnaie (notamment dans des situations de jeu)

Utilise les pièces et les billets à ta disposition pour représenter la somme d'argent nécessaire pour acheter un livre qui coûte 43 € 25 c (éventuellement avec le moins de pièces et de billets possible).

Calcule la somme constituée par 4 billets de 10 €, 4 billets de 5 €, 3 pièces de 2 €, 4 pièces de 20 c et 2 pièces de 2 c **.**

Échanger des pièces ou des billets contre une pièce ou un billet, ou le contraire.

Léo achète une montre à 37 €, il donne un billet de 50 €. Combien va-t-on lui rendre ?

Une baguette coûte 1 € 35 c, Léo a donné 2 €. Combien la boulangère va-t-elle lui rendre ?

Calculer une différence entre deux sommes d’argent.

Problèmes dont la résolution conduit à calculer une somme ou une différence.

Il avait 328 €, il a dépensé 127 €. Combien lui reste-t-il ?

Il avait 280 €. Il a acheté un livre à 12 € et une console à 155 €. Combien lui reste-t-il ?

Léo passe 15 minutes chez le coiffeur, 25 minutes à la piscine, puis 10 minutes à ranger ses affaires. Léo, peut-il tout faire en 45 minutes ?

Au lancer de poids, Léo a atteint 3 m 54 cm. Il lui manque 7 cm pour atteindre la même distance que son camarade. Quelle distance a atteint son camarade ?

Problèmes dont la résolution conduit à calculer un produit

Un agriculteur a 4 vaches. Il donne 50 L d'eau par jour à chaque vache. Combien de litres d'eau donne-t-il chaque jour à ses quatre vaches ?

Dans son camion, un maçon a 2 sacs de sable pesant 30 kg chacun et 1 sac de ciment pesant 35 kg. Quelle est la masse de son chargement ?

Problèmes de durée

Lucie part de chez elle à 8 h 30. Elle rentre à 12 h 30. Combien de temps est-elle partie ?

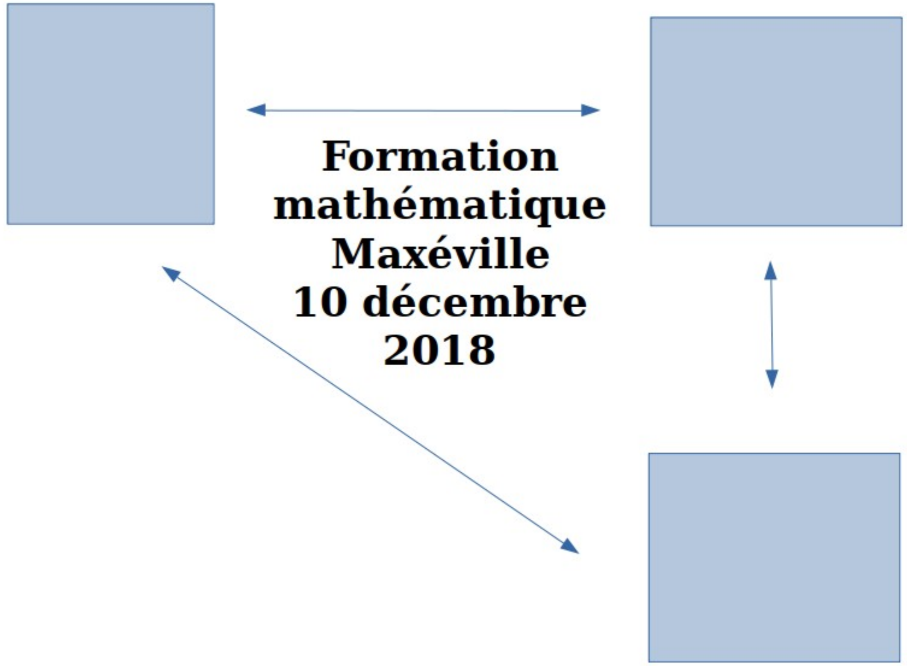
Lucie a un entraînement de foot de 14 h 00 à 16 h 00. Combien de temps a duré l’entraînement ?

Combien y-a-t-il d’heures dans 3 jours ?

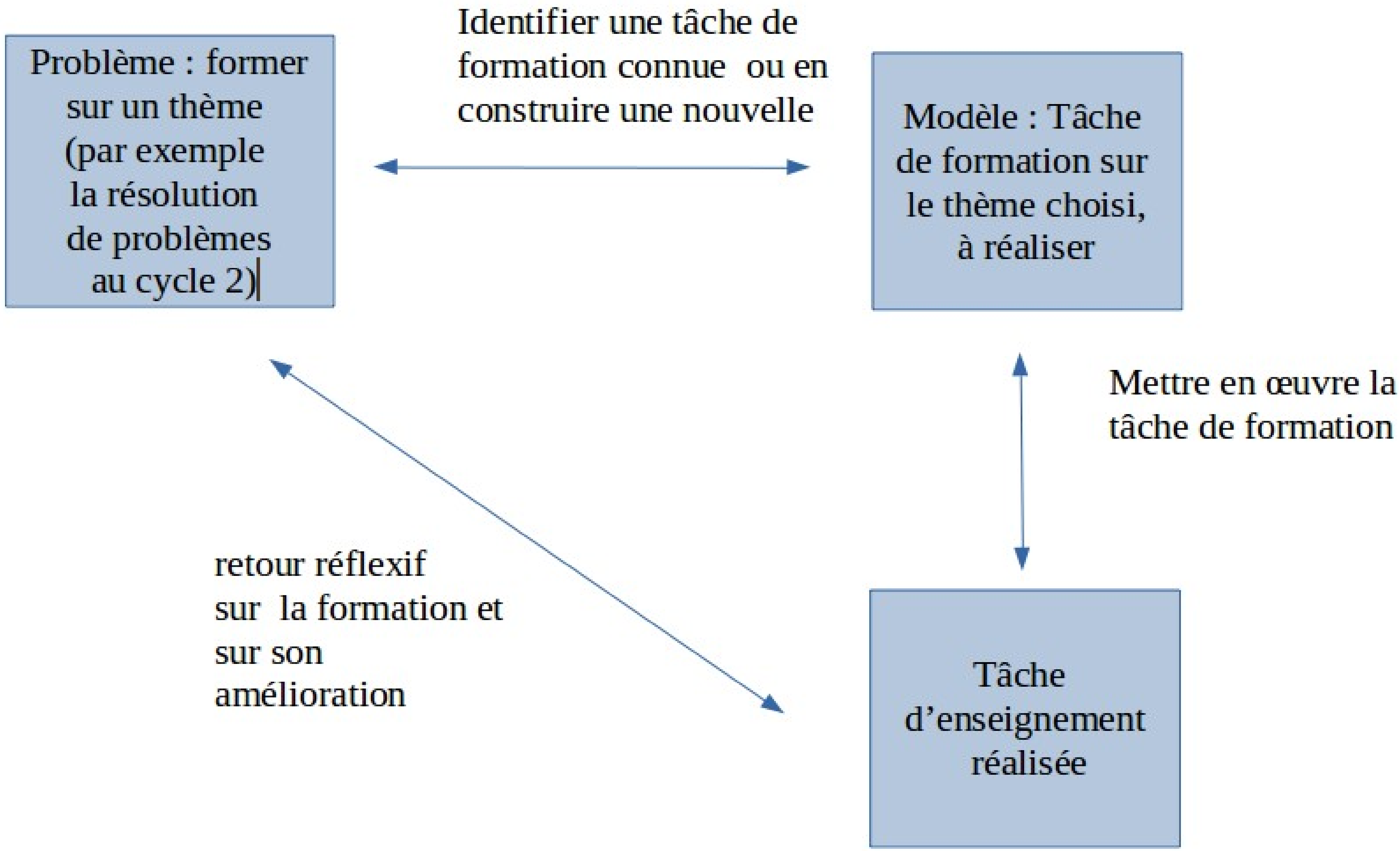
Combien y a-t-il de minutes dans 3 heures ?

Problèmes de partage : Léo veut 700 g de pêches. Une pêche pèse environ 70 g. Combien lui faut-il de pêches ?

CE2 **Problèmes impliquant des manipulations de monnaie** (notamment dans des situations de jeu) :
Utilise les pièces et les billets à ta disposition pour représenter la somme d'argent nécessaire pour acheter un livre qui coûte 243 € 25 c (éventuellement avec le moins de pièces et de billets possible).
Calcule la somme constituée par 3 billets de 50 €, 2 billets de 20 €, 4 billets de 10 €, 4 billets de 5 €, 3 pièces de 2 €, 5 pièces de 50 c, 4 pièces de 20 c et 2 pièces de 2 c.
Échanger des pièces ou des billets contre une pièce ou un billet, ou le contraire.
Léo achète une montre à 167 € 95 c, il donne 4 billets de 50 €.
Combien va-t-on lui rendre ? Calculer une différence entre deux sommes d’argent.
Problèmes dont la résolution conduit à calculer une somme ou une différence :
Il avait 2 328 €, il a dépensé 1 273 €. Combien lui reste-t-il ?
Il avait 1 280 €. Il a acheté un livre à 12 € et une console à 355 €. Combien lui reste-t-il ?
Léo passe 15 minutes chez le coiffeur, 20 minutes au supermarché, 1 heure à son cours de natation puis 15 minutes à ranger ses affaires. Léo peut-il tout faire en deux heures ?
Au lancer de poids, Léo a atteint 3 m 54 cm. Il lui manque 57 cm pour atteindre la mêmedistance que son camarade. Quelle distance a atteint son camarade ?
Problèmes dont la résolution conduit à calculer un produit
Un agriculteur a 4 vaches. Il donne 75 L d'eau par jour à chaque vache. Combien de litres d'eau donne-t-il chaque jour à ses quatre vaches ?
Dans son camion, un maçon a 2 sacs de sable pesant 80 kg chacun et 1 sac de ciment pesant 75 kg. Quelle est la masse de son chargement ?
Problèmes de durée :
Lucie part de chez elle à 8 h 45. Elle rentre à 12 h 30. Combien de temps est-elle partie ?
Lucie a un entraînement de foot de 13 h 45 à 16 h 15. Combien de temps a duré l’entraînement ?
Combien y-a-t-il d’heures dans 3 jours et 8 heures ?
Combien y a-t-il de minutes dans 3 heures et 35 minutes ?
Problèmes de partage : Léo veut 300 g de cerises. Une cerise pèse environ 7 g. Combien lui faut-il de cerises ?



Former à la résolution de problèmes au cycle 2


Problème : former sur un thème (par exemple la résolution de problèmes au cycle 2)
Identifier une tâche de formation connue ou en construire une nouvelle
Modèle : Tâche de formation sur le thème choisi, à réaliser
Mettre en œuvre la tâche de formation
Tâche d'enseignement réalisée
retour réflexif sur la formation et sur son amélioration

Stratégies de formation (Houdement 2013, Kuzniak 1994)
stratégies culturelles : accroissement des connaissances des formés sans préjuger de l'impact en classe (formation transmissive , ressources en ligne, parfois conférence dialoguée). Exemple : conférence.
stratégies basées sur la monstration : observation de mises en œuvre en classe . Hypothèse : transparence des savoirs didactiques et pédagogiues : il suffit de voir pour apprendre (imitation)
Exemple : stages en classe, observations de vidéos, jeux de rôles.
stratégies basés sur l'homologie : le formateur adapte (transpose) la situation d'apprentissage des élèves au niveau des formés. Ce sont souvent des situations socio-constructiviste. Exemple :
1) Apprendre la table de 17 avec un baton à compter.
2) Apprendre la numération COPIX (avec une numération orale différente de la notre et une numération écrite dans une base différentes de la notre).
stratégies d'homologie-transposition : Essaie de contrôler la réception des connaissances par les formés et leur mis en œuvre en classes. Essaie d'expliciter les connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques, en les décontextualisant de la situation d'homologie qui les a révélées. Complète les dispositifs précédents par des connaissances théoriques explicites.
Exemple : lesson study (Clivaz 2016)
Justifications (Robert 2010) : mathématiques ; didactiques ; - professionnelles (prescriptions officielles ; conditions et contraintes du contexte institutionnel)

Retour réflexif sur l’enseignement de la modélisation *(Cabassut, Ferrando 2015)*

Difficultés dominantes (plus de 50% d'accord)

il est difficile d'estimer la durée pour résoudre une tâche de modélisation;
ça prend trop de temps pour préparer une tâche de modélisation pour l'enseignement ;
le travail en classe sur les tâches de modélisation prend beaucoup de temps;
la plupart des élèves ne savent pas quoi faire avec des tâches de modélisation ;
les tâches de modélisation requièrent beaucoup de ressources supplémentaires au prix de beaucoup d'énergie ;
je n'ai pas assez de ressources pour l'enseignement de la modélisation ...

Points positifs dominants sur la modélisation (plus de 50% d'accord)

les problèmes de modélisation favorisent à la fois les élèves, avec les moins bons résultats et ceux qui ont les meilleurs résultats

je me sens capable d'utiliser les erreurs des élèves pour faciliter leur apprentissage de la modélisation ;

je me sens capable de soutenir les élèves dans le développement des compétences en argumentation en lien avec les tâches de modélisation ;

les tâches de modélisation mettent beaucoup en valeur l'autonomie des élèves ;

les élèves acquièrent beaucoup de connaissances sur l'utilisation des mathématiques dans les tâches de modélisation ;

les élèves reconnaissent souvent qu'il n'y a pas qu'une seule solution correcte.

Exemples de ressources

Association ARPEME : http://www.arpeme.fr/

IREM de la Réunion :
http://irem.univ-reunion.fr/

CANOPE :
https://www.reseau-canope.fr/BSD/index.aspx

MODELISATION : http://lema-project.org

METHODE EN BARRES

https://www.youtube.com/watch?v=_9cHD7vkwmU

JEU DE GO : http://strasgo.gostrasbourg.fr/

CONCLUSION

- « Il devient urgent et crucial d'enrichir la mémoire des problèmes de chaque élève : l'élève disposerait ainsi de plus de schémas et face à un nouveau problème, serait plus à même de pointer des analogies avec quelque chose de déjà rencontré, au moins en partie. Cet enrichissement passe nécessairement par la rencontre des élèves avec des problèmes qu'ils mènent à terme » (Houdement 2018, p.115)
- Recodages sémantiques (reformulation dans d'autres contextes mais avec conservation de la catégorie de problème) : « Des progressions d'apprentissage peuvent être élaborées afin de faire évoluer les représentations des élèves, notamment par des recodages sémantiques, afin de limiter l'influence des analogies intuitives lorsqu'elles font obstacle. De tels recodages sémantiques favorisent la perception d'analogies qui fondent les notions scolaires et peuvent favoriser un développement de la conceptualisation. » (Sander 2018 p.136)

Conclusion

- Le retour réflexif sur la variété
  - Des énoncés
  - Des hypothèses
  - Des registres de représentation
  - Des analogies
  - Des procédures
  - Des difficultés
  - Des contextes

  enrichit les futures résolutions, les futurs enseignements, les futures formations.

- Limiter l’élève, l’enseignant, le formateur à un répétiteur de quelqu’un qui pense pour lui **appauvrit**.

Créer le navire ce n’est point tisser les toiles, forger les clous, lire les astres, mais bien donner le goût de la mer […] Créer le navire, ce n’est point le prévoir en détail. Car si je bâtis les plans du navire, à moi tout seul, dans sa diversité, je ne saisirai rien qui vaille la peine. Tout se modifiera en venant au jour et d’autres que moi peuvent s’employer à ces inventions. Je n’ai point à connaître chaque clou du navire. Mais je dois apporter aux hommes la pente vers la mer.

Antoine de Saint-Exupéry (1959) Citadelle, LXXV.

Bibliographie

Brousseau, G. (1998). Théories des situations didactiques. La pensée Sauvage, Grenoble

Cabassut Richard (2009) Un exemple de formation continue à la modélisation dans le cadre du projet LEMA : description et problèmes rencontrés Actes du XXXVème Colloque Copirelem. Bombannes.

Cabassut Richard, Ferrando Irene (2015) Difficultés pour enseigner à partir du monde réel comme ressource : comparaison franco-espagnole. 42ème colloque COPIRELEM. Université de Franche-Comté. Besançon. Juin 2015.

Chevallard Yves (1980) Quel est l'âge du capitaine ? Bulletin de l'APMEP. Num. 323. p. 235-243.

Clivaz, S. (2016). Lesson Study: from professional development to research in mathematics education. *Quadrante*, *XXV*(1), 97-112. Consulté le 4 juillet 2016, dans http://www.apm.pt/portal/quadrante.php?id=223147&rid=223131

Duval Raymond (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. Vol 5. Pages 37-61. IREM de Strasbourg.

Fayol Michel (2008) La résolution de problèmes : de la compréhension aux opérations. In Actes du séminaire national : L’enseignement des mathématiques à l’école primaire. Eduscol.

Gamo, S., Taabane, l. & Sander,E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. L’Année psychologique, 111, 613-640.

Houdement Catherine (2013) Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques. Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris-Diderot.

Houdement Catherine (2018) Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème ? , in Julia Pilet & Céline Vendeira (ed.) (2018) Préactes du séminaire de didactique des mathématiques. ARDM.

Julo Jean (1995) Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Kuzniak Alain (1994). Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré. Thèse. Université Paris 7.

Lema (2009) www.lema-project.org

Levain J.-P. & Vergnaud G. (1995) La proportionnalité simple et multiple. Grand N. n°56. p.55-67.
Levain, J.P., & Didierjean, A. (2017). Problèmes multiplicatifs, proportionnalité et théorie des champs conceptuels. *Revue Rééducation Orthophonique, numéro spécial sur la cognition mathématique*, *269*, 145-160.
Neagoy Monica & al. (2017) La méthode de Singapour. CE2. Librairie des Ecoles.
Neagoy Monica & al. (2018) La méthode de Singapour. CP. Librairie des Ecoles.

Parzysz Bernard (1988) Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. Bulletin de l'APMEP. Num. 364. p. 339-350.
Petit Serge (2007) Le tilleul et le marronnier ou une expérimentation en géométrie à l'école, au collège ou en Seconde. Revue Sesamath.
Pluvinage François (1992) Didactique de la résolution de problèmes. Petit x n°32, pp. 5 à 24.
Riley, M. S., Greeno, J. G., et Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (dir.), The development of mathematical thinking (p.153-196). New York, NY: Academic Press.
Sander Emmanuel (2018) Une approche interprétative de la résolution de problèmes, in Julia Pilet & Céline Vendeira (ed.) (2018) Préactes du séminaire de didactique des mathématiques. ARDM.
Houdement Catherine (2018) Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème ? , in Julia Pilet & Céline Vendeira (ed.) (2018) Préactes du séminaire de didactique des mathématiques. ARDM.
Vergnaud G. (1990) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives . Petit x. n° 22 pp. 51 à 69, IREM de Grenoble.
Vergnaud, G., Brégeon, J.-L., Dossat, L., Huguet, F., Myx, A., & Péault, H. (2001). Le Moniteur de Mathématique, cycle 3, résolution de problème, fichier pédagogique. Nathan.